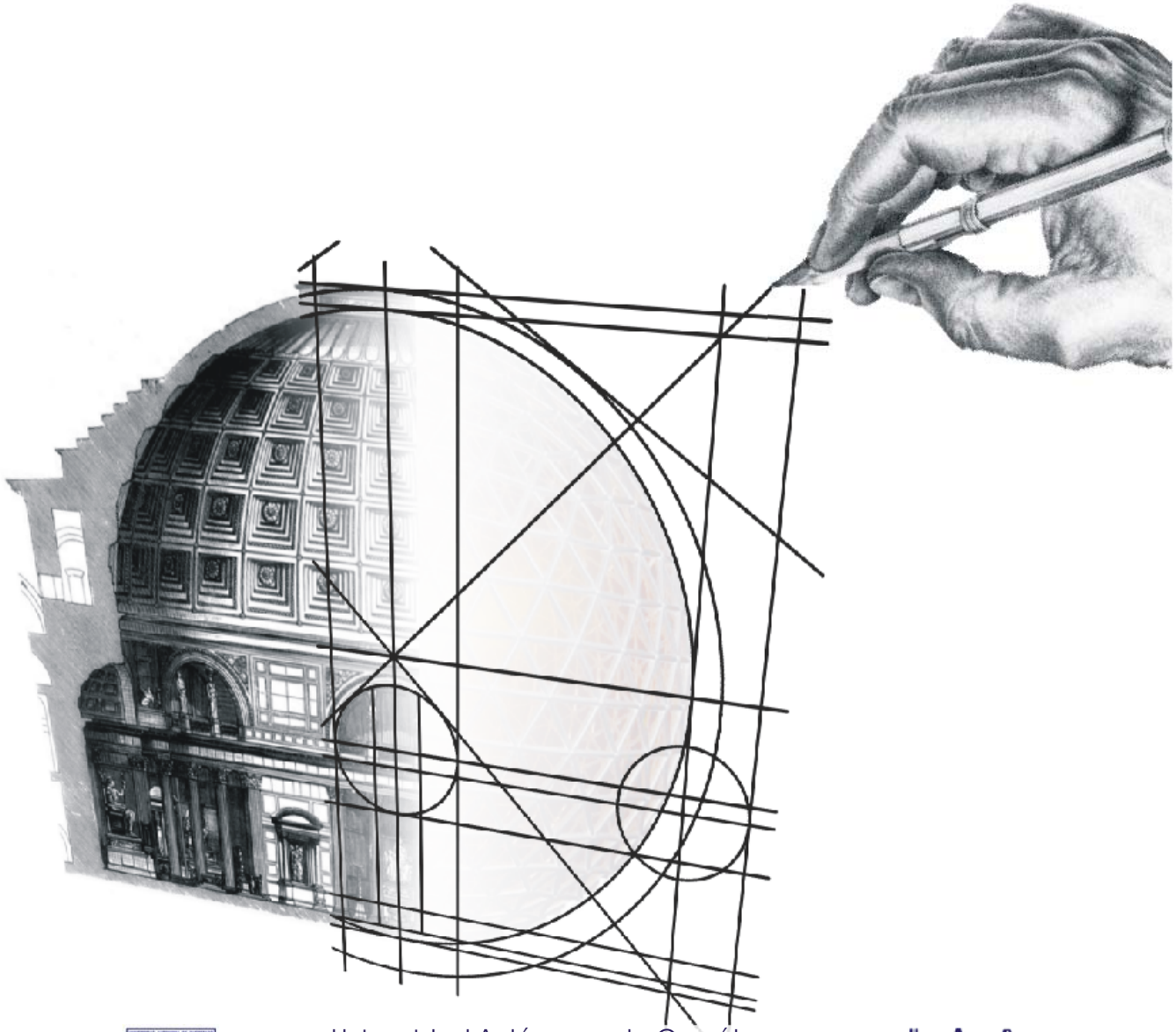
Demostrar es un problema o el problema es demostrar

Víctor Larios Osorio

Primera Edición



Universidad Autónoma de Querétaro
Escuela de Bachilleres "Dr. Salvador Allende"

Obra realizada con recursos del Programa Integral de Fortalecimiento Institucional de la Educación Media Superior (PIFIEMS) 1.0

DEMOSTRAR ES UN PROBLEMA O

EL PROBLEMA ES DEMOSTRAR

REFLEXIONES Y PROPUESTAS SOBRE EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN EN AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA

VÍCTOR LARIOS OSORIO

M. en A. Raúl Iturralde Olvera
Rector

Dr. Guillermo Cabrera López
Secretario Académico

M. en C. Ma. Eugenia Mejía Velázquez
Directora de la Escuela de Bachilleres

Ing. Jaime Nieves Medrano
Secretario Académico

Q.A. Ma. de los Ángeles Núñez Ramírez
Coordinadora del Plantel Sur

M. en D. Ma. de Lourdes Hernández Reyna
Coordinadora del Plantel Norte

Lic. Eduardo Elías Pozas
Coordinador del Plantel San Juan del Río

L. en N. Alma Luz Reséndiz Zarazúa
Coordinadora del Plantel Ajuchitlán

M. en F. Sergio Centeno García
Coordinador del Plantel Pedro Escobedo

Lic. Juan Manuel Guasti Pizarro
Coordinador del Bachillerato Semiescolarizado

ISBN: En trámite.

Demostrar es un problema o
el problema es demostrar

AUTOR:
Dr. Víctor Larios Osorio

Primera Edición, septiembre 2006.

Realizada con recursos del Programa Integral de Fortalecimiento Institucional de la Educación Media Superior (PIFIEMS) 1.0

Escuela de Bachilleres, U.A.Q.
Universidad Autónoma de Querétaro
Centro Universitario, Cerro de las Campanas
Santiago de Querétaro, Qro. C.P. 76010

Coordinador de Publicaciones:
Psic. José Arturo Arreola y Cárdenas

Este libro se terminó de imprimir en septiembre de 2006, en Impresos Guillén, S.A. de C.V. Calle 37 No. 802 Lomas de Casa Blanca C.P. 76080.
Tiraje: 500 ejemplares, más sobrantes de reposición.

A mi esposa ***Nora***

Enseñar matemáticas es enseñar una forma de ver el mundo.
JAVIER SÁNCHEZ POZOS

Nadie puede pretenderse culto sin tener la idea de lo que la matemática es y hace.
IAN STEWART
[*Conceptos de matemática moderna*, 10]

ÍNDICE

Página

Índice ..... **i**

Agradecimientos ..... **iii**

1. Introducción **1**

2. Las conjeturas en la Matemática y su enseñanza **5**

2.1. El uso y desuso de las conjeturas en Educación Matemática 5

2.2. Las conjeturas en el desarrollo histórico de la Matemática 9

3. Una trilogía indisoluble: problemas, conjeturas y demostraciones **13**

3.1. Consideraciones epistemológicas previas 13

3.2. Problemas para demostrar: Algunas consideraciones al respecto 17

3.3. La demostración matemática 22

3.3.1. Sobre la demostración matemática 23

3.3.2. Sobre la enseñanza de la demostración 28

4. Algunos estudios didácticos que involucran el papel de las conjeturas en el aprendizaje de la demostración **38**

4.1. Prueba y demostración 39

4.2. Argumentación y demostración 43

4.3. Intuición y demostración 51

4.4. Unidad cognitiva de teoremas 60

4.5. Comentarios adicionales 65

5. La demostración en Geometría Dinámica: Una oportunidad en la enseñanza con computadoras **68**

5.1. Dos aspectos de las construcciones geométricas: lo figural y lo conceptual 68

5.2. Micromundos con Geometría Dinámica 72

5.2.1. Cabri-Géomètre en el aprendizaje de la demostración 74

5.2.2. Las actividades 78

5.2.3. El papel del docente 102

6. Comentarios finales **103**

6.1. Sobre los aspectos geométricos 103

6.1.1. Sobre la rigidez geométrica y los aspectos figurales 104

6.1.2. Sobre la preferencia en las propiedades 105

6.1.3. Sobre las funciones otorgadas al arrastre 106

6.1.4. Sobre las construcciones y re-construcciones 107

6.2. Sobre la formulación de justificaciones y la construcción de demostraciones 108
6.3. Sobre las repercusiones en la enseñanza de la Matemática 112

Apéndice. La demostración Matemática: definiciones y comentarios 117
a. Definiciones de la demostración..... 117
b. Comentarios sobre la demostración..... 121

Bibliografía 124

Índice analítico.....133

Agradecimientos

Se dice que escribir un libro es como tener un hijo, y como me ha sido negada la oportunidad (biológicamente hablando) de pasar por el proceso de gestar y tener uno, no me queda otra opción que aceptar tal aseveración. También es bien sabido que para tener un hijo se recibe ayuda para su formación y cuidado, así que de manera similar se podría decir que para hacer un libro se recibe apoyo y colaboración, especialmente si es el producto de los últimos años de investigación y estudio. Es por ello que me gustaría agradecer a las personas que me han ayudado y apoyado en estos años de trabajo (y algunos más allá) que han permitido la gestación de este libro.

Inicialmente quiero agradecer a todos los que me ayudaron con sus aportaciones y comentarios, particularmente a Noraísa González, Ernestina Osorio, Martín Larios, Claudia Acuña, Alejandro Díaz Barriga, Javier Sánchez Pozos, Gonzalo Zubieta, Ernesto Sánchez, Mariana Sáiz, Ana Isabel Sacristán, Jorge Martínez Sánchez, Josefina Ontiveros, Nicolina Malara y Bruno D'Amore. Claro está, ellos no tienen la culpa o responsabilidad alguna por los errores que hubiera podido haber plasmado aquí, ya que puedo decir que tengo toda la capacidad del mundo para escribir errores sin darme cuenta (y a veces hasta dándome cuenta).

Además el apoyo brindado por la institución ha sido muy valioso. En particular me gustaría agradecer al rector de la Universidad, el Mtro. Raúl Iturralde Olvera, y a los directores de la Escuela de Bachilleres, Mtra. Ma. Eugenia Mejía, y de la Facultad de Ingeniería, Dr. Gilberto Herrera. Además, no puedo dejar de agradecer a Dolores Cabrera, José Ambrosio Ochoa, René Serrano, Teresa Guzmán, Jorge Martínez Carrillo y Alejandro Padilla, todos ellos personas que me han apoyo de muchas y muy variadas maneras.

Pero siempre en la gestación de un hijo la familia es *el* apoyo y *la* ayuda para el proceso, por lo que tienen el derecho de que les agradezca por ello (y yo la obligación de agradecer) a mi esposa, mis hijos y mis padres.

1. Introducción

La importancia de un problema científico yace más en el conocimiento que genera que en el problema en sí.

La música debería estar al alcance de todos, sin embargo hay sordos; la pintura debería estar al alcance de todos, sin embargo hay ciegos; la matemática debería estar al alcance de todos, sin embargo...
César Rincón

En ocasiones se considera a la enseñanza de la Matemática como un proceso trivial y ello ocurre en parte porque los conocimientos matemáticos parecieran de fácil acceso para la mente entrenada debido a la "naturalidad" con que se estructuran, sensación que proviene del razonamiento que se utiliza. No obstante, para la mente no entrenada y que acude a la escuela, este conocimiento y el razonamiento involucrado resulta harto lejano a lo natural de su entorno pues, de hecho, el cuerpo científico del conocimiento matemático presenta un desarrollo artificial y depurado que, en ocasiones, no se parece al desarrollo cognitivo del conocimiento matemático de un alumno promedio del nivel medio.

Así pues, lejos de ser algo trivial, la enseñanza de la Matemática involucra procesos complejos que se ofrecen como un amplio campo para la investigación en Didáctica de la Matemática. Con la intención final de que estos estudios impacten en la enseñanza a nivel escolar, estas investigaciones se adentran en la temática y en los niveles a que los alumnos están expuestos durante su paso por las instituciones.

Así pues, uno de los 'viejos' problemas en Educación Matemática está relacionado con la construcción de la demostración y la aprehensión de su papel. Se tienen, pues, consideraciones epistemológicas de validación del conocimiento matemático por una parte y de convicciones personales por otra. Además, en el caso particular de la Geometría se añaden nociones relacionadas con la representación gráfica de objetos teóricos que mantienen relaciones lógicas entre sí que les permiten tener una cierta 'movilidad' en el espacio geométrico al que pertenecen, pero que resultan difíciles de aprehender en la mente de los alumnos.

Además se añaden otras cuestiones como es el resolver problemas, construir nociones o realizar demostraciones, por no decir que es posible incorporar al proceso algunos tipos de tecnología que, en última instancia, es una mediadora entre el conocimiento matemático y el individuo. Tal es el caso de la tecnología informática que se presenta en el ambiente escolar, principalmente en el formato de calculadoras y computadoras electrónicas y cuyos avances en los últimos años ha sido tal que el desarrollo de software y propuestas didácticas que la consideren se ha convertido en una necesidad apremiante para lograr que su intervención sea lo más adecuada posible.

En el ámbito geométrico y con el uso de la tecnología existe el denominado software para Geometría Dinámica, el cual proporciona la oportunidad de crear ambientes en los que es posible la experimentación de las representaciones de los objetos geométricos. Pero al igual que cualquier otra herramienta, es necesario que el usuario (en este caso el alumno) interiorice sus rasgos característicos, como es el caso del carácter dinámico de las construcciones. Además, esta herramienta no ofrece de manera directa la posibilidad de construir demostraciones y sí, por el contrario, proporciona comúnmente la opción de verificar las construcciones por medios diferentes a la deducción y que están ligados más a la experiencia directa.

Es en esta experiencia directa, con la creación por parte del docente de ambientes adecuados, que el aprendizaje de la demostración matemática pasa por pasos de exploración, observación y formulación de conjeturas. Estas conjeturas le permiten al individuo obtener un conocimiento con cierta probabilidad de veracidad y que puede ser posteriormente sistematizado y confirmado.

El interés de saber cuál es el papel que toman las conjeturas en la aprehensión del conocimiento matemático por parte del alumno, particularmente al momento en que éste construye la validación de su conocimiento geométrico, es la razón por la que este trabajo se ha desarrollado. Se sabe que los aspectos involucrados en la resolución de problemas son muy amplios, por lo que ha sido seleccionada únicamente la parte que involucra la vinculación conjeturas-demostración, sin menoscabo de que en algún momento se hará referencia a algunos otros aspectos involucrados.

A lo largo de esta obra se observará el papel y el uso de las conjeturas como un paso necesario, si no indispensable, para la resolución de problemas en la Matemática, particularmente los relacionados con las demostraciones, pues, finalmente, si el sujeto no conjetura, ¿entonces qué valida? Asimismo, preguntas como *¿qué es una demostración matemática?*, *¿por qué es necesario aprender a demostrar en la Matemática?*, *¿cuál es el papel que juegan las conjeturas al momento de construir una demostración?*, *¿qué importancia reviste su uso consciente, por parte del alumno, al momento de aprender la demostración?* también son exploradas y contestadas.

Bajo esta tónica, en el siguiente capítulo se muestra, básicamente, la importancia que ha tenido el uso de las conjeturas en el desarrollo histórico de la Matemática, es decir, la importancia de estos procesos para los mismos matemáticos.

Posteriormente, en el capítulo 3, se abordan tres cuestiones básicas:

- La primera son las consideraciones epistemológicas sobre las que se basa el libro completo y que está orientado hacia la corriente constructivista. Esta cuestión influye necesariamente tanto en la selección de los trabajos teóricos referenciados, como al momento de realizar las reflexiones y los análisis de las investigaciones, los resultados, etcétera.
- La segunda es de carácter metodológico, pues se muestra cómo el construir una demostración puede considerarse un problema, es decir, una forma de aproximarse al aprendizaje a la demostración es por medio de la resolución de problemas. En esta parte, por tanto, se exponen algunas concepciones de lo que son los problemas, su caracterización, las dificultades a las que se enfrentan los alumnos

al resolverlos y su misma resolución, los tipos de problemas y su relación con la demostración. Además, como se muestra que construir una demostración en la Matemática (escolar o científica) puede considerarse como un problema, por lo que comparte muchos rasgos y usos didácticos con los tipos de problemas "de aplicación" que comúnmente se utilizan en los cursos de Matemática.

- La tercera cuestión es de tipo ontológico, pues se aborda el significado de la demostración o la prueba. Este abordaje se realiza tanto desde el punto de vista matemático, por ser éste el punto de referencia del conocimiento (es el 'saber sabio' en el sentido de Chevallard [2000]), como desde el punto de vista didáctico pues es el ambiente en el cual este libro está desarrollado. Además se presenta la interrelación y las diferencias entre ambos puntos de vista, así como las funciones que puede tener en el ámbito de la Educación Matemática.

En el capítulo 4 aparecen algunas de las ideas que se han desarrollado en la Didáctica de la Matemática en torno al aprendizaje de la demostración y los elementos que le rodean. Algunos aspectos relevantes son tomados en cuenta, como es el caso de los diferentes tipos de demostraciones y pruebas que pueden existir en el contexto escolar, la relación entre la demostración, la argumentación y la intuición, así como la existencia o no de una continuidad cognitiva en la construcción de la demostración. De esta manera se retoman los trabajos de varios autores como Nicolás Balacheff, Raymond Duval, Efraim Fischbein, Paolo Boero, Alessandra Mariotti y Rossella Garuti. De modo simultáneo se realiza un análisis de sus trabajos, se plasman algunos comentarios y se hacen señalamientos de algunos elementos que posteriormente serán retomados.

En el quinto capítulo se busca establecer un vínculo entre la investigación en Didáctica de la Matemática y la labor docente, pues se retoman las ideas que se mostraron en los dos capítulos previos a fin de proponer actividades tendientes al aprendizaje de la demostración en el ámbito geométrico. Se propone además el uso de software para Geometría Dinámica, por lo que se hace una exposición de algunas consideraciones útiles y necesarias para trabajar en ambientes de Matemática Dinámica dentro de la rama de la Geometría.

El capítulo 6 del libro debe resultarle útil al profesor, ya que ahí aparecen no sólo reflexiones finales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, sino una serie de observaciones que señalan fenómenos que pueden aparecer en el proceso educativo y a los que los alumnos se enfrentan comúnmente. Fenómenos como la *rigidez geométrica*, la preponderancia de los aspectos relacionados con las representaciones gráficas, el uso del *arrastre* como validación en el ambiente de Geometría Dinámica, la observación de ciertas propiedades por sobre de otras, la elaboración de argumentos de diversos tipos y la aceptación de resultados experimentales como medio de validación son mencionados. Además, en la parte final se hacen algunas consideraciones que vale la pena que los docentes tomen en cuenta al encarar su labor, haciendo énfasis en algo que considero crucial: dado el papel central que tiene el profesor dentro del proceso de aprendizaje de los alumnos y dada la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, es imprescindible que su formación le permita tomar en cuenta estos fenómenos y sepa cómo manejarlos.

Se ha añadido un apéndice que contiene una serie de definiciones y comentarios sobre la demostración para que el lector tenga la oportunidad de conocer y contrastar las concepciones que se tienen al respecto. Espero que al lector le resulten tan interesantes como me han resultado a mí.

2. LAS CONJETURAS EN LA MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA

Un buen profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado.
GEORGE POLYA
[*Cómo plantear y resolver problemas,* 35]

Je le vois mais je ne le crois pas.
GEORG CANTOR

2.1. El uso y desuso de las conjeturas en Educación Matemática

Durante años la Matemática ha sido enseñada con base en la misma estructura formal que tiene como disciplina, lo cual podría parecer lógico, económico y eficiente. Sin embargo, esta aproximación resulta más bien artificial desde el punto de vista de su desarrollo pues, como el francés Guy Brousseau comenta en sus *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques* (1986), "esta presentación [la axiomática] oscurece completamente la historia de estos saberes, es decir, la sucesión de dificultades y de interrogantes que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales, su uso para plantear nuevos problemas (...). Enmascara el 'verdadero' funcionamiento de la ciencia (...) para poner en su lugar una génesis ficticia".[1] Ante esta situación se ha visto la necesidad de cambiar la aproximación a la enseñanza de la Matemática, en particular en el nivel medio, pues de hecho sólo una pequeña fracción de los alumnos se ocupará de desarrollar ideas en esta área del conocimiento humano, es decir, serán matemáticos. El resto de los alumnos se ven sometidos a una exigencia social de desarrollo de capacidades para aplicar sus conocimientos a fin de resolver situaciones prácticas y cotidianas de una manera asistemática y en contextos bastantes diferentes a los escolares.

Ante tal situación, hace poco más de una década el National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] de los Estados Unidos publicó los *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* (1989-1991) y los *Principles and standards for school mathematics* (2000), en los se hace hincapié constantemente en la necesidad de que el egresado de los niveles básicos y medios posea una cultura matemática y haya desarrollado habilidades que le permitan aprender la Matemática y resolver problemas.

En México la Secretaría de Educación Pública se ha adherido a una tendencia similar en el nivel medio, tanto en el básico como en el superior. En el primer caso esto se refleja en la denominada *Reforma de la Educación Secundaria* (implementada a partir de 2006), pues en los programas de estudio de los cursos de Matemática se les llama

[1] Todas las citas en otros idiomas han sido traducidas al castellano y, a menos que se indique lo contrario, son traducciones propias.

conocimientos y habilidades a lo que comúnmente se le denominaba *contenidos* con la finalidad de enfatizar el hecho de que se privilegia "la construcción de significados y de herramientas matemáticas por parte de los alumnos, con base en la resolución de problemas" (SEB-SEP, 2006:21).

En el nivel medio superior podemos mencionar tres ejemplos relevantes que están directamente relacionados con el entorno local. Por un lado la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro [UAQ] asume una postura en la que los problemas deben ser una parte medular en el aprendizaje de la Matemática por la misma concepción que se tiene de ésta: "Es muy importante que el estudiante esté consciente que saber Matemática implica saber resolver problemas. (...) La parte formativa de la Matemática, en el sujeto que la estudia, es el generar estrategias que le sirvan para resolver problemas de su entorno, de su vida y de su profesión. Los problemas que el docente elija para trabajar en su grupo deben propiciar la adquisición significativa del conocimiento sin buscar el nivel de profesionalización del estudiante en la Matemática misma" (UAQ, 2003:126-127).

Otras de las instituciones importantes del nivel medio superior es el Colegio de Bachilleres [Cobaq] cuyo curriculum está determinado parcialmente por la Dirección de General del Bachillerato de la Secretaría de Educación Pública [DGB-SEP] y que en 2004 se sometió a una reforma curricular. A lo largo de la documentación de esta reforma se percibe una tendencia similar que queda plasmada en la parte dedicada ala fundamentación del primer curso dedicado al estudio de la Matemática: "La metodología a aplicar debe estar enfocada al planteamiento de problemas precisos que surgen de situaciones de interés para los alumnos. El trabajo en pequeños grupos para discutir una situación problemática que les ha sido planteada, genera la explicitación de las ideas previas que manejan los alumnos acerca de la temática a tratar y ayuda a evidenciar las diferentes formas de reconocer un problema por parte de los integrantes del grupo de trabajo" (DGB-SEP, 2004:3).

En términos más amplios, con respecto a la cobertura geográfica, la Sociedad Matemática Mexicana [SMM] en 2001 echó andar el proyecto *Aplicaciones de las Matemáticas y su Enseñanza* con la finalidad de colaborar en el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática. En particular en el nivel medio superior propuso que la Matemática tiene que ser impartida como una ciencia viva y en evolución, lo cual incluye, entre otras cosas, el aprendizaje por medio de problemas matemáticos:

> "Consideramos que una manera de las maneras más accesibles para que los alumnos de este nivel se adentren en los campos de las Matemáticas, incluyendo el desarrollo de habilidades relacionadas, es a través de enfrentarlos a problemas, llevándolos a resolverlos. Con ello no queremos decir que únicamente hay que resolver problemas y encontrar sus soluciones, sino que se debe llegar a una sistematización del conocimiento a través de una reflexión del alumno, muy probablemente guiada por el docente. (...) Consideramos que de esta manera no sólo se presenta un panorama más real sobre la manera de crear las Matemáticas, es decir, sobre el quehacer del matemático, sino también se muestra a esta ciencia como una parte activa de la sociedad, promoviendo así actitudes positivas en el alumno y eliminando

mitos sobre la inmutabilidad de las Matemáticas y sobre la rigidez de sus métodos, entre otros" (Díaz-Barriga, et al., 2001).

Dicho sea de paso, su propuesta también incluye como parte necesaria la enseñanza de la demostración.

Como se muestra en estos ejemplos, el enfoque de la enseñanza a partir de problemas y su resolución se ha ido imponiendo en los medios académicos, sin embargo ésta parece ser la parte más difícil de incluir en el estudio de la Matemática en el contexto escolar, pues comúnmente los docentes le rehuir rehuyen y no lo toman en cuenta, a pesar de que la mayor parte del conocimiento matemático es resultado de los esfuerzos por resolver problemas específicos y de que los problemas matemáticos son comúnmente originados en la realidad. En el caso particular de la enseñanza de la Geometría el tratamiento *normal* se hace de manera deductiva, con grandes tendencias hacia la axiomatización,[2] sin capacitar al alumno para que visualice los problemas, y para animarle a hacer conjeturas, a pesar de que se considera que el proceso es al revés: primero la visualización y el análisis, y luego viene la axiomatización, como ocurre, por ejemplo, con propuesta para la enseñanza de la Geometría como la desarrollada por el matrimonio holandés van Hiele[3] o bien en la que se propondrá en los capítulos 4 y 5 de este libro.

Se puede pensar que esta actitud está influenciada por la formación de la mayoría de los docentes del nivel medio superior y superior, debido a que la misma formación y concepción de la persona que imparte la clase, el profesor, influye notablemente en la forma misma de impartirla, aún más que la influencia que puede tener la creencia del mismo profesor sobre cuál es el mejor método para enseñar (Santos, 1993). Además, con una formación profesional ajena a la formación pedagógica y a elementos sobre la filosofía, historia y desarrollo de la Matemática, este tipo de docentes ignora por lo general aspectos fundamentales sobre la dinámica del desarrollo de las ideas matemáticas.

---

[2] Aunque comúnmente se hace referencia a este proceso como *formalización*, en realidad es un intento de *axiomatización*, pues el interés parece ser trabajar en un modelo de sistema axiomático formal.

[3] Si el lector está interesado en conocer este modelo de aprendizaje y de enseñanza le sugiero leer las partes correspondientes de los libros de González y Larios (1994) y de D'Amore (1999). También puede consultar obras como la de W.F. Burger y J.M. Shaughnessy (1986), "Characterizing the van Hiele levels of development in geometry", *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1):31-48, o las que Ángel Gutiérrez (http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/) ha publicado con algunos colaboradores como por ejemplo: A. Jaime y A. Gutiérrez (1990), "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele", en S. Llinares y M.V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384), Alfar, Sevilla; A. Gutiérrez y A. Jaime (1991), "El Modelo de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: los giros", *Educación Matemática* 3(2):49-65; y A. Gutiérrez, y A. Jaime (1998), "On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2/3):27-46. Pero si al lector le interesa profundizar, puede leer la tesis doctoral de Pierre Marie van Hiele (en la versión en castellano) de 1957 titulada *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría* (Universidad Real de Utrecht, Utrecht, Holanda), o bien su libro *Structure and insight: A theory of mathematics education* (Academic Press, EEUU, 1986). Hago la observación de que muchos de estos trabajos se pueden obtener en el sitio web de Ángel Gutiérrez.

Para algunos, una manera de mostrar a los alumnos lo que es la Matemática y todo lo que implica es involucrarlos en un ambiente similar al que se encuentran los matemáticos al trabajar. En palabras de Resnikoff y Wells (1973:3):

> "Una manera de presentar las matemáticas a los no iniciados es el de mostrar tópicos atractivos de interés actual o reciente para los matemáticos y estudiándolos con algo de detalle para intentar enseñar a los estudiantes de qué trata las matemáticas y cómo piensan los matemáticos."

Esta insistencia es porque no está presente en los cursos el ambiente propicio dentro del aula que permita trabajar los conceptos desde el punto de vista de la resolución de problemas y que, por ejemplo para Blanca Parra (1990), se debe formar desde los primeros días del curso.

El mismo NCTM insiste en la necesidad de utilizar los problemas como fuente de aprendizajes, y así, como menciona también Fritzler (1997:126), lograr "desarrollar en los estudiantes una visión clara acerca del quehacer matemático", quehacer que se logra resolviendo problemas. Y es al momento de resolver problemas que el individuo plantea estrategias y conjetura sobre las posibles soluciones, o incluso conjetura sobre la misma estrategia, sobre su pertinencia o eficacia. Al conjeturar sobre las posibles estrategias de resolución de un problema, al conjeturar sobre las posibles soluciones, el individuo se encontrará reflexionando sobre sus propios procesos mentales, particularmente hablando, sobre sus procesos de aprendizaje.

Hans Freudenthal se pregunta al respecto:

> "*¿Cómo mantener abiertas las fuentes de discernimiento durante el proceso de entrenamiento; cómo estimular la preservación del discernimiento, en particular en el proceso de esquematización?*" (1988:5)

Y se contesta un poco más adelante:

> "La solución que propongo es: *haciendo que el que aprende* ***reflexione sobre sus procesos de aprendizaje***."

Sin embargo, si como ya se ha dicho no se utilizan los problemas como centro del proceso de aprendizaje, entonces existe una posibilidad muy alta de eliminar de los cursos escolares el recurso de reflexión sobre los procesos propios de aprendizaje y también disminuye notablemente la posibilidad de lograr que el individuo desarrolle habilidades que le permitan aprender más adelante las cosas que la misma sociedad le solicitará para su desempeño como parte activa de ella. Pues aunque no parece estar presente la Matemática en las actividades diarias, y particularmente en las laborales y profesionales, de los individuos, es necesario día a día que los miembros de la sociedad sean capaces de elaborar e interpretar coherentemente modelos para resolver problemas, especialmente cuando las situaciones a las que se encuentran enfrentados se salen de la rutina cotidiana. Esto ya es una exigencia social, como lo señala el británico Richard Noss:

> "Las nuevas culturas del trabajo están redefiniendo las fronteras de lo que necesita ser comprendido como un todo más que como habilidades aisladas." (1999:29)

Aquí consideraré al uso y resolución de problemas un medio eficaz para tal desarrollo de habilidades no aisladas.

Todo esto no se encuentra desligado de la cuestión de las demostraciones, específicamente algebraicas y geométricas. Al contrario, al buscar caminos para resolver problemas adecuados, es posible formalizar la respuesta después de elaborar estrategias y realizar conjeturas, al encontrarse con propiedades nuevas para el individuo, que requerirán ser demostradas. Es por ello que el estudiar los aspectos relacionados con la resolución de problemas, incluyendo la validación algebraica y geométrica, resulta interesante para intentar explicar los procesos de aprendizaje que desarrollan los alumnos de los cursos de Matemática.

Pero antes que nada se tocará el aspecto histórico de su presencia en la Matemática.

2.2. Las conjeturas en el desarrollo histórico de la Matemática

En esta sección se comentará el papel que ha tenido la elaboración y el uso de conjeturas para el desarrollo de los conocimientos matemáticos, con la intención de mostrar un panorama histórico del aspecto que se pretende estudiar. Se puede considerar que si algo ha influido de manera determinante en el desarrollo de la ciencia, entonces puede influir también en el aprendizaje de tal ciencia, pues como comenta Freudenthal (1988:5): "la historia de las matemáticas ha sido un proceso de aprendizaje de esquematización progresiva. Los jóvenes no necesitan repetir la historia de la humanidad pero tampoco debería esperarse que comiencen en el mero punto a donde la generación anterior llegó. En cierto sentido, los jóvenes deberían repetir la historia, aunque no la que de hecho sucedió, sino la que hubiera sucedido si nuestros antecesores hubieran sabido lo que nosotros somos suficientemente afortunados de saber."

A lo largo de la historia de la humanidad se ha ido construyendo el "edificio" matemático que contiene el conocimiento sistematizado de esta rama científica. Tal "construcción" —o, sería más correcto decir, tal desarrollo— ha sido producto en buena parte de la continua necesidad de las sociedades por resolver problemas prácticos a los que se enfrentan en su evolución. Es precisamente el resolver esos problemas lo que ha obligado a los humanos a planear estrategias y desarrollar conjeturas para poder llevar a cabo resoluciones similares de manera eficaz y rápida. Para Dieudonné "la historia de las matemáticas muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico".

Con respecto a las civilizaciones más antiguas en el mundo antiguo tenemos las palabras de Morris Kline (1992:53): "Los babilonios y los egipcios establecieron por razonamiento inductivo su acervo matemático. Por medición deben de haber determinado que el área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura y, habiendo empleado esta fórmula repetidas veces y obtenido resultados correctos, habrán llegado a la conclusión de que la fórmula era intachable." Es decir, como mencionan Moise y Downs (1986:3), "los egipcios eran muy buenos en todo lo

concerniente a medidas e hicieron unas conjeturas muy ingeniosas, que más tarde se verificaron como ciertas."

Tal pareciera que inicialmente las civilizaciones humanas estaban más interesadas en hacer construcciones útiles (a la agricultura, la religión, etcétera), y no se preocuparon en realizar un proceso más formal que llevara a una demostración, ya fuera con fines de explicación o de convencimiento. De hecho, pareciera que es una tendencia del ser humano, pues en la actualidad los alumnos con posibilidad de verificar construcciones geométricas utilizando programas computacionales pareciera que pierden la necesidad de convencerse a través de deducciones. Esta situación parece que se repitió en las civilizaciones mesoamericanas que alcanzaron un avance matemático-astronómico considerable, como los mayas.

Posteriormente los griegos, al establecer el requisito de la demostración deductiva como medio para considerar la certeza de una verdad matemática, despreciaron la parte práctica, es decir, desligaron este conocimiento del mundo de la vida cotidiana. Esto quiere decir, entre otras cosas, que durante el desarrollo histórico de la Matemática no sólo han aparecido conjeturas en los problemas prácticos, de la vida diaria y cotidiana tal como ocurrió en los inicios de las civilizaciones, sino también a un nivel netamente mental y abstracto, separado de la realidad física tangible.

Algunas ramas matemáticas, como el Cálculo, tienen tanto en sus orígenes como en su desarrollo el sello de la intuición y de las conjeturas. Un ejemplo lo presentan Resnikoff y Wells (1973:236):

> "Este concepto [de límite] apareció en una forma embrionaria en muchos periodos primitivos de las matemáticas. Los fundamentos mismos de la notación posicional, está inherente en la técnica Babilónica para la aproximación de raíces cuadradas, aparece en forma geométrica en la estimación de Arquímedes de π obtenida al comparar la circunferencia de un círculo con los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, y nuevamente en su procedimiento para encontrar el área limitada por una parábola y una cuerda."

De hecho, el uso de definiciones intuitivas le trajo críticas a Newton por parte del Obispo Berkeley. En la Geometría, el uso de proposiciones tácitas le produjo un descrédito a Euclides hace algún tiempo. Pero estos dos ejemplos no eliminaron tales conocimientos de la Matemática, sino que se han ido fortaleciendo en su formalidad, para el Cálculo, y en su axiomática, para la Geometría.

En el siglo XX el matemático austriaco Kurt Gödel demostró con sus teoremas que "existe un número infinito de proposiciones aritméticas verdaderas que no pueden ser deducidas formalmente de ningún conjunto dado de axiomas mediante un conjunto cerrado de reglas de deducción" (Nagel y Newmann, 1979:117). Esto quiere decir que en sistemas axiomáticos formales que satisfagan los requisitos que a fines del siglo XIX propusiera David Hilbert, van a existir verdades no demostrables. En otras palabras, habrán conjeturas que, aunque sean verdaderas y algunos lleguen incluso a alcanzar la *categoría* de *conjeturas verificadas*, no llegarán a ser demostradas.

Los ejemplos de conjeturas que han resonado a través de la historia de la Matemática son varios, y por lo general son resultado de la exploración de problemas que han arrojado resultados que, al suponerse válidos, han proporcionado la oportunidad de desarrollar más resultados, los cuales en ocasiones sí han podido ser validados matemáticamente (al hacer lo mismo con la conjetura) o podrían serlo si se pudiese salvar el "hueco" de la conjetura que se ha supuesto. Presentaremos algunos de tales casos.

Un primer ejemplo es el *teorema de los cuatro colores*, que en Teoría de Gráficas ha ofrecido posibilidades de estudios posteriores. Éste surgió de un problema de coloreamiento de mapas a mediados del siglo XIX cuando, inicialmente, Francis Guthrie sugirió como conjetura el resultado ya conocido. Apenas en 1976 los matemáticos Kenneth Appel, y Wolfgang Haken, ayudados por John Koch, de la Universidad de Illinois, E.E.U.U., realizaron un trabajo deductivo para la reducción de un número infinito de mapas a una cantidad de sólo 1 482 mapas básicos distintos. Éstos fueron verificados uno por uno con ayuda de una computadora. Sin embargo, este tipo de revisión no ha satisfecho a algunos matemáticos, pues al ser la primera demostración que no es posible hacer con *papel y lápiz* ha causado algunos problemas sobre su validez. En palabras de Giorgio Bagni (1996:490):

> "Si bien el problema de los cuatro colores puede decirse prácticamente resuelto, falta la esencia de una 'demostración' tradicional, de una prueba 'humana' y no 'electrónica' de la conjetura."

Pero Thomas Tymoczko lo pone aun más claro:

> "La confiabilidad del TC4 [teorema de los cuatro colores], sin embargo, no es del mismo grado que la garantizada por las demostraciones tradicionales, ya que su confiabilidad reside en la determinación de un conjunto complejo de factores empíricos." (1986:258).

Otro ejemplo es la *conjetura de Goldbach*, que afirma que todo número par mayor que 2 se puede expresar como la suma de dos números primos, lo cual se puede confirmar en muchos casos con diversas técnicas, pero aún es un problema matemático no resuelto.

Un tercer ejemplo fue la *conjetura Shimura-Taniyama*, la cual no ha sido demostrada totalmente, pero fue dada por válida, siendo deducidos varios resultados nuevos y, en palabras de Singh y Ribet (1998:23), "hallazgos importantes (…) llegaron a depender de tal conjetura, a pesar de que eran pocos los estudiosos que confiaban en que fuera demostrada en este siglo." Así pues, mientras aún pertenecía a la *categoría* de las conjeturas fue utilizada, aunque después fuese demostrada parcialmente por Andrew Wiles en el proceso de demostración del *último teorema de Fermat*.

Un último ejemplo que se presenta es la denominada *conjetura de Riemann*, que se refiere a una propiedad de los ceros no triviales de la función ζ.[4] Esta conjetura está

[4] La función ζ es una función compleja de variable compleja y está definida como:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots$$

relacionada, entre otras cosas, con la probabilidad de ciertos eventos muy particulares y con algunas cuestiones sobre los números primos, como es su distribución dentro del conjunto de los números naturales. Tales investigaciones en Teoría de Números se han realizado asumiéndola como hipótesis válida, y ha pesar de algunos avances parciales y verificaciones de casos particulares usando computadoras, aún no se ha podido probar ni desmentir completamente (Horgan, 1993; Bagni,1996).

Si se considera que el aprendizaje de la Matemática por parte de un individuo debe realizarse en un ambiente **similar** al de un matemático que desarrolla Matemática, es decir, que el individuo sea capaz de identificar, seleccionar y usar estrategias comúnmente usadas por los matemáticos, entonces hay que tomar en cuenta que estos individuos llevan a cabo y aceptan de manera informal el tipo de afirmaciones denominadas *conjeturas*.

Llama la atención la descripción que hace Andrew Wiles sobre su experiencia de *hacer* Matemática durante el proceso de demostración del *último teorema de Fermat*:

> "[Wiles] describe su experiencia de hacer matemáticas como un viaje por una mansión oscura e inexplorada. 'Uno penetra en la primera sala de la mansión, en plena oscuridad. Vas dando tumbos por ella, tropezando con el mobiliario, pero poco a poco vas averiguando dónde está cada mueble. Al final, más o menos al cabo de seis meses, atinas con el interruptor de la luz. La enciendes y, de pronto, todo queda iluminado; percibes dónde te encuentras exactamente. Te trasladas entonces a la sala siguiente y pasas otros seis meses en la oscuridad. Por ello, cada uno de estos progresos, aunque a veces sean sólo momentáneos, a veces a lo largo de un período de un día o dos, son la culminación de muchos meses de ir dando trompicones por la oscuridad, y no podrían existir sin esos meses que los precedieron.'" (Singh y Kenneth,1998:25)

Resulta interesante el último renglón, donde hace hincapié en los meses de trabajo, de investigación, de **conjeturaciones**, que preceden a cada uno de los resultados formales que, en ese momento, pasan a formar parte del *corpus* científico del conocimiento matemático.

Se ha visto, en los ejemplos citados, que las conjeturas han tenido un papel muy importante, de hecho indispensable, en el desarrollo histórico de las ideas matemáticas, pues han resultado ser un paso necesario en el proceso de formalización y axiomatización de esta ciencia. Podríamos mencionar el caso eventual de los resultados que han sido encontrados de una manera casi casual cuando se están demostrando formalmente otros resultados; pero excluyendo estas situaciones, se podría decir que antes de que un conocimiento pudiese ser validado matemáticamente, debió de haber sido conjeturado por alguno de los individuos que lo desarrollaron.

La *conjetura de Riemann* afirma que todos los ceros no triviales de ζ tienen la propiedad de que su parte real es ½.

3. UNA TRILOGÍA INDISOLUBLE: PROBLEMAS, CONJETURAS Y DEMOSTRACIONES

Cuando uno mismo hace el descubrimiento —
aunque sea la última persona de la Tierra en
ver la luz— no lo olvida nunca.
CARL SAGAN
[*El mundo y sus demonios*, 363]

Para la mayoría de la gente, la matemática se
administra y se recibe como un remedio.
SEYMOUR PAPERT
[*Desafío a la mente*, 65]

En este capítulo se abordarán tres aspectos fundamentales cuando se habla de enseñanza de la demostración (aunque no en este orden): la posición epistemológica, lo que es una demostración matemática y lo que representa ésta en términos de resolver problemas.

El primer aspecto a considerar es porque cualquier investigación, reflexión o discusión relativa a temas educativos, ya sea que esté relacionado con la enseñanza o bien con el aprendizaje, se apoya en una postura epistemológica implícita o explícitamente determinada, es decir, en supuestos sobre la forma en que se construye, se genera y se valida el conocimiento.

El segundo aspecto que se tocará es necesario mencionarlo porque, finalmente, el objeto que se está proponiendo que se enseñe en este libro es la demostración matemática. En efecto, al ser el objeto de estudio propuesto debe ser clarificado y, a diferencia de otros objetos que se estudian en la Matemática, la demostración no es precisamente una técnica o un concepto, sino un proceso de validación del conocimiento.

Finalmente, es necesario el tercer aspecto que se menciona: qué le representa a un individuo la demostración matemática en términos de resolver problema. Esta parte, que si bien se aborda en un segundo lugar durante el capítulo, es interesante pues se plantea la necesidad de ver a la demostración matemática como un tipo especial de problemas y, por tanto, como algo que comparte características con las aproximaciones didácticas basadas en la resolución de problemas.

3.1. Consideraciones epistemológicas previas

La posición epistemológica que se ha considerado para el libro, incluyendo la elección de los materiales e investigaciones de sustento, así como de los análisis y las reflexiones realizadas, es el *constructivismo*. A diferencia de lo que comúnmente se

concibe, esta postura epistemológica no intenta explicar cómo realizar el proceso docente ni modela la enseñanza, sino que busca explicar cómo el ser humano, a lo largo de su historia personal, va desarrollando lo que llamamos intelecto y va conformando sus conocimientos. Para ello el constructivismo está basado en dos premisas principales:

1. Que el sujeto que aprende **construye de manera activa su conocimiento**, y no lo hace de manera pasiva, como si únicamente lo recibiese de su entorno.
2. El proceso del conocimiento es adaptativo que organiza el mundo experiencial del individuo y no sólo se descubre un mundo independiente y preexistente que está fuera de la mente del conocedor.

Se puede observar que la segunda premisa se dirige hacia una idea radical de que el individuo construye un mundo interno que no tiene necesariamente es una "copia" del mundo exterior, por lo que considerar las dos premisas es adoptar el llamado *constructivismo radical*. Por otro lado, hay que decir que si sólo se considera la primera entonces se está en la corriente denominada *constructivismo ingenuo*.

Por otro lado, Pedro Gómez considera que, en el caso particular de la Educación Matemática, las siguientes ideas proporcionan características más precisas para esta posición epistemológica (Kilpatrick, Gómez y Rico, 1995):

- Las estructuras cognitivas se encuentran en un continuo desarrollo. Éste se basa en las estructuras ya existentes a través de transformaciones realizadas por sucesivas adaptaciones y acomodamientos de las estructuras, producto de la continua interacción del individuo (y por tanto de sus estructuras cognitivas) con los objetos que se aprehenden.
- Para aprender la Matemática, es decir, para construir conocimientos matemáticos, se requiere un proceso de abstracción reflexiva.

Estos puntos que resaltan la construcción activa del conocimiento y el desarrollo constante de las estructuras cognitivas, llevan implícitos dos procesos que Jean Piaget considera indispensables: la adaptación y el acomodamiento. Ambos procesos fueron tomados del evolucionismo y sirven para explicar el continuo desarrollo del individuo que continuamente está obteniendo información a través de sus sentidos, gracias a las interacción *activa*[5] que tiene con el objeto a conocer, y procesándola a fin de enriquecer y modificar las estructuras que ha ido conformando. Los nuevos conocimientos son asimilados de acuerdo a lo que ya existe en el individuo y se acomodan en las estructuras de éste, no sólo modificándose los conocimientos, sino también a las estructuras mentales.[6]

[5] Aquí el término *activa* no se refiere únicamente a una actividad física o lingüística, sino también a una reflexión mental.

[6] Para entender este cambio en las estructuras mentales se puede utilizar como ejemplo sencillo el caso de las estructuras algebraicas: el conjunto de números naturales (0, 1, 2, 3,...) y la operación suma (que produce un número del mismo conjunto) es una estructura algebraica; si se introduce la operación resta en ocasiones tendremos cosas con sentido (p.ej. 5–3 y 124 568–56 731) y en otras sin sentido: 2–10 y 542 201–897 485, por ejemplo. Para salvar este escollo se introducen los números enteros negativos y la resta se concibe como una suma: 3–2 = 3+(–2), por ejemplo, con lo que se obtiene una *nueva* estructura algebraica con más potencialidad que la anterior. Este cambio mayoritariamente es cuantitativo.

Por esta razón resulta que el individuo cambia continuamente, en sus estructuras mentales, pero al mismo tiempo cambia al objeto en el plano del conocimiento. En posteriores acercamientos del sujeto al objeto ambos habrán cambiado desde el punto de vista del sujeto, pues éste modificó su estructuración interna, mientras que el objeto fue "modificado" para los ojos del mismo sujeto.

Este proceso tiene como resultado una descentración progresiva del sujeto. En otras palabras, comienza a reconocer que no es el sujeto el centro del universo al tener la interacción con objetos ajenos a él. Interacción que al mismo tiempo le llevan a realizar abstracciones de los objetos.

En este punto de la abstracción no hay un consenso general, pues para el mismo Piaget existen dos diferentes abstracciones: la física y la reflexiva.[7] Sin embargo existe la dificultad de establecer una diferenciación si no tajante, sí bien diferenciada entre una y otra. Gérard Vergnaud opina ligeramente distinto y resulta más convincente: la abstracción de objetos físicos y de operaciones sobre objetos físicos resulta de la acción del sujeto, pues al abstraer los objetos físicos no se establece una "copia" del objeto, sino que se toman en cuenta las propiedades (que son los invariantes) del objeto.

Esto lleva también a considerar tres puntos interesantes que plantea el mismo Vergnaud (1987) sobre la abstracción:

- La *invarianza de esquemas*, que se refiere al uso de un mismo esquema mental para diversas situaciones semejantes.
- La *dialéctica del objeto-herramienta*, que se refiere a que el uso proporcionado a aquello que abstrae inicialmente lo utiliza como herramienta para resolver algo en particular, pero posteriormente le da un papel de objeto al abstraer sus propiedades. Pero el proceso continúa, pues al obtener el sujeto un objeto a partir de una operación descubre nuevas cosas que, inicialmente, utilizará como herramientas para después abstraer sus propiedades y convertirlas en objetos, y así sucesivamente. De esta manera el individuo conceptualiza al mundo, y sus objetos, en diferentes niveles.
- El *papel de los símbolos*, que simplifican y conceptualizan los objetos al obtener sus invariantes sin importar el contexto en el que se encuentren.

Además, resulta que una vez que se llevan a cabo el proceso de abstracción en el individuo, es decir que éste es capaz de hacerlo, no hay vuelta atrás: el individuo ya no perderá esta capacidad (a menos que surja una situación que lesione algún órgano como el cerebro).

Pensemos ahora en concreto sobre educación matemática y el impacto que sufre ante estas ideas. Retomaremos inicialmente las palabras de Kilpatrick (1987:6):

> "Como teoría de la adquisición del conocimiento, el constructivismo no es una teoría de la enseñanza o de la instrucción. No existe una conexión necesaria entre cómo concibe uno que el conocimiento se adquiere y qué procedimientos instrucciones ve uno como óptimos para lograr que esa

[7] Hermine Sinclair (1987) y Luis Moreno Armella (1996) coinciden en este punto, sólo que le llaman "tipos de conocimiento".

adquisición ocurra. Las epistemologías son descriptivas, mientras que teorías de la enseñanza o de la instrucción debe (...) ser teorías de la práctica."

Éste es el abismo del refrán.[8] De la teoría a la práctica hay una discontinuidad.

Desde un punto de vista constructivista, el individuo que aprende Matemática debe construir los conceptos a través de su interacción con los objetos y con los otros sujetos. Ésto implica que el profesor que se considere constructivista debe reconocer que no le enseña Matemática a los estudiantes, sino que "les enseña cómo desarrollar su cognición" (Confrey, 1990:110). En caso contrario tal interacción se puede mermar, entre otras causas, debido a una tendencia en el ámbito escolar por centrar los cursos de Matemática en enseñar definiciones y técnicas matemáticas fuera de un contexto o con un aplicación muy pobre, ya que, como señala Josefina Ontiveros (1994:39), "a la escuela no le interesa, propiamente que los estudiantes resuelvan problemas (...) sino que aprendan un modo particular de resolverlos: los métodos matemáticos."

Y ya que se ha mencionado algo sobre problemas en clases de Matemática, continuaremos sobre la misma línea.

Tal parece que para que el alumno pueda construir su conocimiento y llevar a cabo la obligatoria interacción activa con los objetos matemáticos, incluyendo la reflexión que le permite abstraer estos objetos, es necesario que estos objetos se presenten inmersos en un problema y no en un ejercicio. De hecho son estas situaciones problemáticas las que introducen un desequilibrio en las estructuras mentales del alumno, que en su afán de equilibrarlas (un acomodamiento) se produce la construcción del conocimiento.

Este camino también implica errores, y es por medio de éstos como el sujeto cognoscente busca la manera de encontrar el equilibrio que, con toda intención, el problema propuesto por el docente le hizo perder. Para lograrlo, y de paso construir su conocimiento el alumno debe "retroceder" para luego "avanzar" y así lograr una construcción más precisa y con un significado más profundo de su conocimiento.

Tiene que ser considerada también como parte fundamental el trabajo en equipo, la interacción social del sujeto que aprehende el mundo junto con otros sujetos que le permita avanzar más en grupo que individualmente. De hecho esta parte lo consideran muy importante algunos teóricos que se adhieren al *constructivismo social* y que no sólo conciben al conocimiento matemático como un producto social (es decir, socialmente "objetivo" o aceptado), sino que además consideran que el desarrollo del individuo se ve profundamente influenciado por sus interacciones sociales en todos los sentidos: lo que es el conocimiento válido, los métodos permitidos, etcétera. El lenguaje, de esta manera, tiene un papel preponderante porque no sólo le permite al individuo comunicar los hallazgos propios, sino también es un medio para estructurar su pensamiento y su conocimiento construido. Así que, en palabras de Gérard Vergnaud, "el conocimiento objetivo sólo es alcanzado cuando ha sido discutido y confirmado por otros."

Este carácter social del conocimiento, tanto en la construcción de la ciencia como del conocimiento escolar, será enfatizado un par se secciones más adelante, haciendo hincapié en el caso particular de la demostración matemática y su aprendizaje.

[8] Me refiero al refrán popular que reza: "Del plato a la boca se cae la sopa".

3.2. Problemas para demostrar: Algunas consideraciones al respecto

Es bien sabido de la existencia actual de una tendencia de pensar en el aprendizaje de la Matemática apoyándose en el planteamiento y la resolución de problemas, lo cual ha sido retomado en parte del desarrollo histórico de la Matemática, tal como se mencionó brevemente en el capítulo anterior y además es coherente con la postura epistemológica del constructivismo. Sin embargo, también es bien sabido que en el ámbito educativo el uso del término *problema* para el aprendizaje y la enseñanza resulta ser, precisamente, un problema por la ocasional falta de claridad de sus características. Es por ello que vale la pena pensar en clarificarlo antes de continuar.

En 1769, en la entonces Nueva España, Don José Ignacio Bartolache impartía cátedra en la Real Universidad de México, siendo ese año en que publicó una de sus obras: *Lecciones matemáticas*. En esta obra el guanajuatense define el término *problema* de la siguiente manera:

> "*Problema*, es una proposición práctica, en que se manda hacer alguna cosa, suponiendo ya sabidas otras, que se requieren para su ejecución." (1769/1990:51-52)

Remarcando su naturaleza práctica continúa: "*Todo Problema es práctico, y en tanto se distingue del Teorema, y otras especies de proposiciones, en que sólo se contempla la verdad de las cosas, afirmando o negando unos atributos de otros.* (…) *Es regular que los Problemas tengan cierta correspondencia con los Teoremas, de suerte que aquéllos tienen su origen y se fundan en éstos. Y la razón es que una buena práctica es el fruto de la verdadera teórica.*" Ya en la Ilustración novohispana un docente de Matemática hace referencia al carácter práctico de los problemas.

Es precisamente tal carácter lo que le otorga la importancia al uso de problemas como medio para el aprendizaje de la Matemática, pues como se plantea en el ambiente de la Didáctica de la Matemática, el aprender Matemática no sólo involucra resolver problemas, sino que hasta cierto punto *implica* resolver problemas. Ante esta situación se hará un mayor hincapié en este proceso, pues involucra la conjeturación en su resultado.

Para Alan Schoenfeld (1985), *problema* es un término que utiliza para referirse a "una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacer. Además, esa dificultad debe ser un atolladero intelectual más que uno computacional" (pág. 74). Con lo anterior se muestra la visión de que una situación se convierte o no en problema dependiendo del individuo que lo aborda. El mismo Schoenfeld regresa a esta interactividad individuo-problema en seguida:

> "Las mismas tareas que exigen esfuerzos significativos para algunos estudiantes pueden muy bien ser ejercicios rutinarios para otros (...). De esta manera ser un 'problema' no es una propiedad inherente a una tarea matemática. Más bien, es una relación particular entre el individuo y la tarea lo que hace a la tarea un problema para esa persona." (Pág. 74)

Esto conduce directamente al hecho de que no todos los "problemas" escolares son *problemas*, pues hay que diferenciar entre este término y el de *ejercicio*, a pesar de que, por ejemplo, George Polya (1969) los considera un tipo muy particular de problemas: los *de rutina*, que son "…todo problema que se puede resolver ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto, ya sea siguiendo paso a paso, sin ninguna originalidad, la traza de algún viejo ejemplo" (pág. 163). Sin embargo, a este tipo de actividades insistiré en llamarles *ejercicios* por no representar un reto real a la creatividad y las habilidades matemáticas del individuo que llevarían a la construcción de conjeturas en el momento en que realizara validaciones. Es posible que estos ejercicios puedan ayudar a la enseñanza y a los procesos de validación, pero no parece ser que el papel de su resolución llegue a ser una finalidad por sí misma, sino únicamente un paso intermedio con fines de adquisición de habilidades "mecánicas", experimentales, de observación inductiva o de búsqueda de patrones por parte del alumno.

Blanca Parra (1990:21-22) afirma que en general los problemas propuestos en la escuela son "como ejercicio de aplicación de algoritmos", no se les concibe como un proceso y se busca únicamente que el individuo, el alumno, seleccione el algoritmo correcto, sin obligarlo a interactuar con situaciones que lo lleven a "comprometer sus conocimientos, a revisarlos, a modificarlos, o rechazarlos para formar un conocimiento nuevo." Alan Schoenfeld considera también que la mayoría de los "problemas" que se les plantean a los estudiantes no son realmente problemas, sino sólo ejercicios, que además están hechos para resolverse en un corto tiempo, con lo cual queda la sensación errónea en los alumnos de que no es necesario invertir días, semanas o incluso meses para resolver un problema en particular.

Con ésto se muestra necesidad establecer la diferencia entre *problema* y *ejercicio*, siendo tal diferencia crucial porque, como ya se dijo, parece ser que los ejercicios por sí mismos no promueven la conjeturación en los alumnos, mientras que los problemas los obligan a realizarla. Sin embargo, hay que aclarar que esta diferenciación resulta subjetiva, relativa al alumno, pues su capacidad y sus experiencias previas resultan determinantes para decir si un problema lo es o es, simplemente, un ejercicio.

Para utilizar problemas para el aprendizaje de la Matemática con algún grado de éxito convendría intentar caracterizar lo que es un problema, así que consideraremos los siguientes aspectos (ver Parra, 1990; Godino y Batanero, 1994; Santos, 1997):

- Que sea considerado como un proceso y no sólo como un resultado, y que además tenga diferentes métodos de solución y posibles resultados. Polya (1969) insiste incluso en variar las incógnitas, los datos o las condiciones de los problemas, claro está sin modificar sustancialmente el problema original.
- Que despierte un interés suficiente como para ser resuelto, que al alumno le interese lo suficiente como para que, como dice Polya, se concentre y desee ansiosamente resolverlo, que se entregue al problema "en cuerpo y alma".
- Que no exista garantía de que al aplicar un algoritmo se obtenga el resultado de manera inmediata: "si uno tiene acceso inmediato al esquema de solución para una

tarea matemática, esa tarea es un ejercicio y no un problema" (Schoenfeld, 1985:74).

- Que exista algún criterio para determinar cuándo el problema ha sido resuelto o completado satisfactoriamente.
- Que permita el desarrollo del razonamiento matemático, promoviendo una actitud positiva hacia la Matemática.
- Que el error al tratar de resolverlo se convierta en una fuente de conocimiento.

En resumen, que obligue a los alumnos a establecer una interacción con situaciones que los lleven a poner en tal situación sus propios conocimientos como para verse forzados a revisarlos, modificarlos o rechazarlos, a fin de construir un conocimiento nuevo.

Ésto lleva a tomar en cuenta la separación de la idea de que los problemas deben ser tomados como situaciones trilladas, como un quehacer reiterativo y repetitivo, para acercarse a la idea de que son fuente misma del conocimiento construido por el alumno a través de la interacción de lo que quiere aprender: la Matemática.

En términos del proceso de resolución de un problema John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey (1987) identifican las siguientes fases para resolverlo:

1. Abordar el problema, donde se realiza un trabajo por interpretar y entender el problema, identificando la situación, la información que se tiene y lo que se desea obtener, a dónde se quiere llegar.
2. Atacar el problema, fase en la cual se realizan actividades como conjeturar, convencer, justificar y cómo reaccionar ante posibles dificultades.

   En esta fase el individuo, al realizar un plan, una estrategia, es decir al resolver el problema, se involucra en un proceso reflexivo que llevará a la posible solución por medio de una formalización y simplificación progresiva del problema utilizando estrategias, conjeturas, justificaciones, que le permitan comprender el camino de la solución o formalizar procedimientos basados en la visualización mediante el uso de algoritmos. Ahondaremos más sobre estas fases en las secciones de los capítulos 4 (en las páginas 60 y ss.) y 5 (en las páginas 78 y ss.) como una aplicación directa en la enseñanza y aprendizaje de la demostración.
3. Evaluar el proceso, lo cual incluye el análisis de la solución, la revisión de las operaciones, la reflexión sobre el proceso y las ideas involucradas, así como la posibilidad de extender el problema o las estrategias de resolución a contextos más amplios.

   Esta fase es la evaluación del proceso que llevó a la posible solución del problema, así como de la pertinencia de dicha solución, fase que comúnmente no se realiza o que toma en cuenta sólo la coincidencia del resultado proporcionado por el alumno con el resultado que el maestro ya tiene de antemano. Cuando ocurre ésto, se omite un paso importante y, quizá, uno de los que contienen mayor riqueza para el aprendizaje del individuo, pues el evaluar la solución, reexaminarla y reflexionar en el camino que le llevó a ésta, son procesos que podrían consolidar

los conocimientos y desarrollar las aptitudes para resolver problemas de los alumnos.

La evaluación de un problema debe ser un proceso, al igual que la misma resolución del problema, que parta desde el inicio de la resolución y termine hasta después de haberse resuelto el problema, realizándose paralelamente a la misma resolución y a través de estas fases, que también se corresponden con las propuestas de Parra. En cada uno de estos momentos se evalúa la capacidad del individuo para entender el problema, para reestructurar la información, para elegir la(s) estrategia(s) de solución pertinentes, y lo razonable de la solución misma.

Lo que se ha mencionado lleva a pensar que las conjeturas son un paso obligado en la resolución de problemas, y por tanto parte del proceso mismo del aprendizaje de la Matemática, indispensable e interesante por los aspectos que presenta.

Por otro lado, para realizar un análisis más pertinente con el objetivo de este trabajo se podría pensar en un cierto tipo, muy particular, de problemas, por lo que recurriremos a algunas de las clasificaciones que existen. Una primera es la que propone Fredericksen (1984) quien sugiere tres categorías basándose en la estructuración que presentan los problemas:

1. *Problemas bien estructurados*: que son los que se encuentran formulados de manera clara, cuya solución se obtiene aplicando un algoritmo conocido y con criterios de verificación del resultado. Hasta cierto punto, pareciera que los *ejercicios*, o *problemas de rutina* de Polya, se pueden incluir en esta categoría.
2. *Problemas estructurados que requieren un 'pensamiento productivo'*: aunque parecidos a los anteriores, presentan la característica de exigirle al individuo que los resuelve el diseño parcial o total del proceso de solución.
3. *Problemas mal estructurados*: son los que no tienen una formulación clara, que no existe un procedimiento que garantice de antemano la obtención de una solución correcta, y que carecen de criterios completamente definidos para la evaluación de tales soluciones. En esta categoría se pueden incluir la mayoría de los problemas cotidianos a los que se puede enfrentar un individuo.

Podemos observar que los problemas que comúnmente se aplican en el ambiente escolar pertenecen a la primera y a la segunda categoría. Particularmente, en la segunda categoría se pueden incluir las demostraciones matemáticas, y otros problemas, dejándola demasiado abierta para la intención del presente trabajo. Por esta razón consideraremos a continuación la clasificación que Lev Fridman (1995) propone de los problemas, aunque resulta un poco más compleja.

Inicialmente considera una división de acuerdo al carácter de los objetos involucrados en el problema, clasificándolos en *problemas prácticos* (o *aplicados*) y en *problemas matemáticos*. Los problemas prácticos involucran objetos reales o materiales, siendo los problemas cotidianos algunos de los que están incluidos en esta categoría; también algunos de los problemas que están presentes en los cursos de Matemática pueden ser considerados de esta clase. Algunos de este tipo de problemas pueden ser resueltos con ayuda de la Matemática, para lo cual habría que resolver el problema

matemático correspondiente, lo cual quiere decir que el problema práctico es *reducible* a un problema matemático.

Los *problemas matemáticos*, dice Fridman, son aquellos en los cuales los objetos involucrados son de carácter matemático, como números, funciones, etcétera. Éstos, a su vez, los divide en *problemas característicos* y en *problemas no característicos*, siendo la diferencia fundamental el hecho de que los primeros se pueden resolver a través de la concatenación de pasos, o algoritmos, planteados directamente por reglas ya elaboradas (definiciones, fórmulas, teoremas) y que son proporcionadas en los cursos de Matemática. Al contrario, el segundo tipo no pueden ser resueltos de esta manera, aunque hace la aclaración de que, ocasionalmente, es posible reducirlos a problemas característicos a través de subproblemas (descomponiendo el problema original) y usando reglas heurísticas.

A su vez, a éstos los clasifica de acuerdo al *carácter del requerimiento del problema* en tres categorías:

1. *Problemas que se reducen a encontrar un objeto matemático*: aquellos que involucran la búsqueda de incógnitas.
2. *Problemas que se reducen a una demostración o una explicación*: son los problemas cuyo requerimiento está enfocado en el convencimiento de la validez de cierta proposición, en el someter a prueba la veracidad de la proposición o explicar las causas de algún fenómeno.
3. *Problemas que se reducen a una transformación o una construcción*: éstos incluyen problemas en los que se solicita la transformación de algo (una expresión, por ejemplo) o la construcción de un objeto matemático (una figura geométrica o una expresión algebraica.

Esta es una clasificación donde las demostraciones aparecen casi abarcando una sola categoría, aunque Fridman la circunscribe únicamente a la Matemática. Sin embargo, Polya (1969) propone una clasificación más simple de los problemas de acuerdo al propósito que buscan éstos, dividiendo el conjunto total de los problemas en dos categorías: los *problemas por resolver* y los *problemas por demostrar*. Esta segunda categoría es la que interesa más en este momento, por lo que ahondaremos en el tipo de problema que Polya caracteriza como aquellos cuyo propósito es "… mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada" (p.161), y no, como ocurre con los problemas de la primera categoría, que tienen como propósito la búsqueda de una incógnita. Hay que aclarar que los problemas por demostrar incluyen no sólo a los de validación matemática (teoremas), sino también juicios referentes a otras disciplinas como, por ejemplo, la Filosofía y el Derecho, pero tampoco se hará mayor referencia a éstos.

A diferencia de los problemas por resolver, cuyos elementos son la incógnita, los datos y la condición, los problemas que se ocupan de demostraciones tienen como elementos principales la hipótesis y la conclusión. Resulta muy interesante notar que se recomienda que al recurrir a problemas semejantes al que se plantea, se haga referencia a teoremas relacionados o que relacionen propiedades útiles para la demostración solicitada. Finalmente resulta que los teoremas relacionados y utilizados para la

realización de una demostración pedida pueden ser considerados, a su vez, como problemas por demostrar.

De esta manera, las situaciones que incluyen validaciones matemáticas o demostraciones son, finalmente, problemas con características particulares, pero que ni pueden dejarse de lado en el estudio y aprendizaje de la Matemática, ignorando su relación con las conjeturas, sus procesos y sus implicación en la educación matemática, ni tampoco se les pueden negar las características que, como medio del aprendizaje del individuo, comparten con los demás tipos de problemas.

Para ahondar al respecto, en lo que resta del capítulo abordaremos más al respecto desde los puntos de vista matemático y didáctico.

3.3. La demostración matemática

Se puede decir, de una manera breve, que una demostración matemática está constituida por una serie de argumentos que tienen, tanto en su contenido como en su estructura, particularidades muy específicas. Es por ello que si parte del interés de este trabajo es estudiar las posibles justificaciones que los alumnos proporcionan sobre propiedades geométricas observadas, entonces resulta pertinente revisar la noción de demostración en sus diferentes facetas.

Los españoles Juan Díaz Godino, Carmen Batanero y Ángel Recio (Godino y Batanero, 1994; Godino y Recio, 2001) consideran básicamente cuatro contextos institucionales en los cuales se maneja la demostración: el de *los matemáticos profesionales*, que es donde se construye la ciencia matemática y que sirve como referencia a las demás comunidades que la utilizan; el de *los "utilizadores" del saber matemático en las ciencias experimentales*, en donde aparecen prácticas argumentativas empíricas, inductivas, analógicas, etcétera, que llevan a concluir que si algo es verdadero en algunos casos entonces es verdadero en el conjunto o, por lo menos, lo será (con cierta probabilidades) siempre y cuando las circunstancias sean semejantes; el de *la vida cotidiana*, en el que se suele utilizar argumentaciones informales,[9] y el *del salón de clase*, que es el que corresponde a la institución de *los "enseñantes" del saber matemático*.

Por el ámbito de este trabajo serán considerados únicamente dos de estas instituciones: la matemática, por ser aquella en la que se genera el conocimiento matemático (incluyendo las demostraciones), utilizada por los matemáticos profesionales; y la de los enseñantes del saber matemático, que comprende el conocimiento impartido por los profesores en las aulas.

De esta manera, a continuación se aborda lo que es el *significado institucional* de la demostración en la institución que nos sirve de referencia, es decir, se explora el significado que sobre la demostración se tiene en la institución matemática. La segunda

[9] Godino y Recio (2001:410) comentan con respecto al uso del término *argumentación*: "Si, como afirman Garuti, Boero y Lemut (1998, p. 345), hay continuidad cognitiva entre la fase de producción de conjeturas y la construcción de demostraciones, puede considerarse que estas formas argumentativas constituyen, en matemáticas, los primeros estadios de la demostración."

parte de la sección está orientada a la descripción y análisis del significado institucional de la demostración en la institución de los enseñantes del saber matemático, a fin de establecer algunas diferencias iniciales entre los significados que se le otorgan a este objeto matemático en ambas instituciones, pues es "en el seno de las distintas instituciones [que] se realizan ciertas prácticas apropiadas para el fin de lograr la solución del correspondiente campo de problemas" (Godino y Batanero, 1994:336).

Resulta necesaria abordar desde ambos puntos de vista a la demostración debido a que el significado que se le otorgue en la Educación Matemática queda determinado por el que se le otorga en la Matemática misma como consecuencia del proceso de transposición didáctica a que pueda ser sometido.

3.3.1. Sobre la demostración matemática

Como se acaba de decir, el primer punto de vista para revisar la noción de demostración es el de la institución matemática, pues es al seno de ésta que se realizan y se han realizado las prácticas que la generaron y que la utilizan durante la construcción de la ciencia, sirviendo así como punto de referencia a los trabajos de las demás comunidades que la utilizan.

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, particularmente en la sección 2.2 (páginas 9 y ss.), las técnicas matemáticas se desarrollaron desde hace miles de años en muy diversas culturas sobre la Tierra, siendo los griegos quienes se desligaron en cierta medida de la parte práctica de éstos y forzando así la aparición de objetos como el de la demostración que conocemos hasta hoy día. Aunado a ello está la naturaleza de los objetos matemáticos, pues al desligarlos de la práctica cotidiana se convierten en entes a los que sólo se puede acceder a ellos a través de símbolos y, por tanto, están ajenos a la verificación y manipulación empírica directa.

Este aspecto de la Matemática ha supuesto una diferencia importante con respecto a otras ciencias y ha convertido a la demostración matemática en una parte epistemológicamente central en la ciencia matemática. En efecto, este tipo de validación del conocimiento surgió precisamente como una consecuencia necesaria de la naturaleza de los objetos matemáticos:

> "La demostración formal nace como una respuesta a una demanda continua de justificación, una demanda que se remonta a Aristóteles y Euclides, a través de Frege y Leibniz. Ha habido siempre una necesidad de justificar nuevos resultados (…), no siempre en el sentido limitado de definir su verdad, sino más bien en la más amplia acepción de suministrar razones para su plausibilidad. La demostración formal ha sido y es una respuesta suficientemente útil a esta preocupación por la justificación." (Hanna, 1996:30)

En otras palabras, los conocimientos generados de esta forma en particular requieren de una validación ajena a los juicios empíricos. Al justificar tales conocimientos no se estaría verificando una teoría a través de casos particulares, esperando que ésta se ajustase a la realidad circundante y con la posibilidad latente de su posterior desplazamiento por otra teoría mejor ajustada, sino que se estaría verificando el

conocimiento de todos los casos en general de algunos objetos muy particulares desligados de la realidad.

Este sentido se ve de una manera más fehaciente, a pesar de que muchos profesores de Matemática la consideran como una ciencia ocupada de estudiar cantidades, lo cual la convertiría en alguna disciplina *práctica* como la física, la geodesia, etcétera, en caracterizaciones como la de Charles S. Peirce (1983:163) que la define en "el estudio de lo verdadero de las situaciones hipotéticas" y para lo cual se apoyó en una definición previa que dio su padre Benjamin Peirce: "la ciencia que obtiene conclusiones necesarias". Sin embargo, ¿qué conclusiones necesarias son las que obtiene?, ¿qué situaciones hipotéticas estudia?

Charles S. Peirce propone esta caracterización basándose principalmente en tres aspectos: el tipo de razonamiento "indirecto" que utiliza para obtener sus resultados, pues la Filosofía y otras ciencias utilizan un razonamiento más directo, *corolarial* le llama, al momento de realizar las inferencias que producen tales resultados (o teoremas); el uso de abstracciones que permiten la creación de clases de colecciones utilizadas por la misma Matemática; y la generalización que permite llevar a cabo tales abstracciones.

Así que la demostración es una parte medular del conocimiento matemático al ser una componente epistemológica básica de validación científica, pues viene a ser la manera matemática en que el ser humano generaliza y abstrae resultados que de otra manera se quedarían sin justificación o estarían apoyados únicamente en proceso inductivos de observación. Esta generalización y abstracción es la que permite su uso dentro de la misma Matemática y como aplicación en otras.

Thomas Tymoczko en *The new directions in the Philosophy of Mathematics* escribe:

> "Hemos nombrado tres rasgos de las demostraciones: que son convincentes, revisables y formalizables. El primero es un rasgo centrado en la antropología de la matemática, el segundo es la epistemología de la matemática y el tercero es la lógica de la matemática. Los últimos dos son características profundas. Es debido a que las demostraciones son revisables y formalizables que son convincentes para las mentes racionales." (1986:248)

Así pues, la noción de "demostración" o "prueba", que más que un concepto es un producto generado en un proceso, puede ser definida desde un punto de vista lógico siguiendo la cita de Nagel y Newmann (1979:64):[10]

> "Por «prueba» (o «demostración») formal designaremos una serie finita de fórmulas, cada una de las cuales o es un axioma o puede ser derivada de otras fórmulas anteriores de la serie mediante las reglas de transformación."

Donde los términos *fórmulas* y *reglas de transformación* se refieren, respectivamente, a las expresiones correctas dentro del sistema axiomático donde se ha desarrollado la demostración, y a las reglas de deducción que convierten una fórmula en otra de manera válida. De hecho, con esta última definición se hace casi evidente el

[10] En el apéndice se ha incluido una lista más amplia de definiciones reportadas en la literatura. Asimismo, se han incluido comentarios de otros autores, por lo que se recomienda su lectura.

carácter sintáctico que tiene la demostración ya construida y terminada, es decir, la importancia principal no recae en el sentido de los objetos que aparecen enunciados en dicha *serie finita de fórmulas* o ese *exacto y bien ordenado discurso*, sino que se centra en la relación sintáctica establecida entre los pasos de la demostración, entre las *fórmulas* que aparecen en la *serie* o entre los *silogismos* que conforman dicho *discurso*. La demostración matemática, como tal, es un producto esencialmente sintáctico.

La noción de demostración desde el punto de vista de la sintáctica inmersa en esta definición se ha mantenido más o menos en el mismo sentido desde casi el inicio mismo de la Matemática, pues se puede decir que autores griegos como Euclides, Arquímedes y Apolonio ya la concebían así; en otras palabras, se considera que existe Matemática como ciencia, como disciplina, desde que se maneja esta noción de demostración como medio de validación. Históricamente es indisoluble la relación existente entre la Matemática y la demostración, y parece ser que no cambiará significativamente en un futuro cercano.

No obstante, existen básicamente dos impedimentos para encontrar la demostración de cualquier teorema. El primero que se mencionará tiene que ver con el carácter de consistencia de los mismos sistemas axiomáticos; esto es, con el requisito de que no se puedan demostrar una proposición y su negación dentro del mismo sistema axiomático. El segundo tiene que ver con cuestiones prácticas.

La primera complicación mencionada se refiere a los resultados que obtuvo Kurt Gödel con sus teoremas de completez e incompletez para sistemas axiomáticos como los que propuso David Hilbert a inicios del siglo pasado, y que tenemos un ejemplo en el sistema axiomático de la aritmética propuesto en los *Principia Mathematica* de Bertrand Russell y Albert N. Whitehead. Los resultados a los que llegó Gödel en 1931 muestran que no todas las proposiciones ciertas en un sistema axiomático, como el de la Aritmética, pueden ser deducidas a partir de los axiomas iniciales y utilizando las reglas de deducción. Esto quiere decir sencillamente que existen conjeturas aritméticas que no pueden ser demostradas.

La segunda complicación la ejemplifica Kline (1992:54) de la siguiente manera: “La inferencia inductiva de la suma de los ángulos de un triángulo puede efectuarse en cosa de minutos. (…) Por otro lado, para llegar deductivamente a las mismas conclusiones tal vez harían falta semanas o acaso no alcanzara la vida entera del individuo normal.”

Incluso esta dificultad, añadida con el problema ocasional de la casi imposibilidad práctica de realizar deducciones rigurosas en una prueba, ha llevado a veces a que los matemáticos profesionales, aún respetando el carácter “deductivo” de la demostración, utilicen “atajos” y no sigan fielmente, a manera de convenio social, las estrictas restricciones que la Lógica formal impone. De esta manera, la demostración para un matemático profesional es deductiva y rigurosa, pero no necesariamente formal, y puede tomar un carácter falsacionista, social, convencional e, incluso, temporal. Reuben Hersh (1993), por ejemplo, describe a la prueba en la práctica real del matemático como “un argumento que convence a jueces calificados” (pág. 391).

Además, la existencia de la demostración en la institución matemática no sólo se restringe a su aparición como un producto final y pulido, sino que en el proceso de su

desarrollo aparecen actividades como la intuición y las conjeturas, que pueden llevar incluso a que algunas ramas matemáticas, como es el caso del Cálculo que se mencionó al final del capítulo anterior (pág. 10), tengan en sus orígenes y en su desarrollo la presencia de las conjeturas, lo cual no las eliminaron de la Matemática, sino que permitieron su reformulación formal.

Pero ante las complicaciones prácticas, en la misma investigación matemática se han tomado algunas posturas ante estas concepciones, siendo algunas influidas por los trabajos de Imre Lakatos (1978:25), quien en su obra *Pruebas y refutaciones* define a la demostración como:

> "*…un experimento mental (o «cuasi-experimento») que sugiera una descomposición de la conjetura original en subconjeturas o lemas, incorporándola* así a un cuerpo de conocimiento tal vez muy lejano."

Esta definición, que es más filosófica que matemática o lógica, así como otros factores como el aparente "encarecimiento" de la investigación, ha propiciado que aparezcan otros métodos que intentan ser reconocidos como de validación. Al respecto se señalan al menos tres tipos de "demostraciones" diferentes al tradicional (Hanna, 1996; Pioli, 1998; Godino y Recio, 2001): la *demostración a conocimiento cero*, la *demostración holográfica* y la demostración con el uso de la computadora. Por su propia naturaleza, comentaremos brevemente las dos primeras para posteriormente hacer un comentario más amplio sobre la tercera.

La *demostración a conocimiento cero* se desarrolla en una dinámica en la cual interactúan dos interlocutores: quien ha demostrado algo y otra persona (el "revisor", como le llama Gila Hanna). Quien ha realizado la demostración presenta argumentos a fin de convencer a su interlocutor de que la demostración existe, mas sin proporcionar información de la demostración en sí. Se trata de convencer al otro únicamente a través de argumentaciones. Sin embargo, aunque el "revisor" haya quedado convencido de la existencia de la demostración, por no conocerla directamente es incapaz de convencer otros y, tampoco, puede realizar una inspección directa de la supuesta demostración.

La *demostración holográfica* se refiere a transformar una demostración usando métodos similares a los utilizados en códigos error-corrección para la transmisión de mensajes con menos probabilidad de pérdida de información al volverlos altamente redundantes. Horgan (1993) comenta que se ha mostrado que es posible reescribir la demostración original con esta intención de tal manera que un error en la demostración original se *expanderá* a lo largo de la demostración re-escrita y así, para verificar si la demostración es correcta, bastaría controlar algunos pasos de la demostración re-escrita. No obstante, produce una casi-certeza, dependiendo del número de verificaciones que se realicen, pues no es posible controlar entonces **toda** la demostración y, por tanto, no está abierta al control. Además, advierte que una demostración tratada de esta manera podría aumentar su tamaño enormemente, haciendo aún más difícil la verificación.

La *demostración con el uso de las computadoras*[11] en procesos de verificación exhaustivos de conjeturas no ha sido completamente aceptada, como ya se mencionó en

[11] El lector debe tener cuidado con no confundir el papel que pueden jugar las computadoras en las demostraciones matemáticas dentro de la Matemática en sí, tal como se está mencionando aquí, con

el capítulo anterior (pág. 11). Una razón muy poderosa para este recelo es el carácter de falibilidad que, por sus limitaciones tanto de *hardware* como de *software*, tienen los equipos electrónicos, como por ejemplo su incapacidad de manejar magnitudes continuas (números reales), concretándose al manejo de magnitudes discretas ("unos" y "ceros" para ser un poco más exactos). Además, añadido al riesgo de que se llegue a una cultura denominada *matemática semi-rigurosa*, la cual, a la larga, resultaría más costosa y contraproducente para el desarrollo de esta ciencia, existe el recelo ocasional proveniente de una falta de *entendimiento* de los procesos que realizan las máquinas y que en el caso de las demostraciones a "papel y lápiz" se tiene presente (Thurston, 1994).

Por otro lado, y pensando en la cuestión de que el esquema teórico de toda computadora actual está basado en el pensamiento del matemático Alan Turing, ya que toda computadora se puede considerar una "máquina de Turing", resulta que el mismo Turing probó que su máquina universal nunca podría resolver ciertos problemas (ver Copeland y Proudfoot, 1999). ¿No podría ser que el determinar si una afirmación es o no teorema, el construir o encontrar una demostración o el determinar si un argumento es válido como demostración de un teorema sean de estos problemas que no pueden ser computables?

Hay que mencionar que el uso de los ordenadores en este tipo de demostraciones está básicamente enfocado a la verificación de casos de las conjeturas propuestas, pero también existe la posibilidad de usarlos en el desarrollo mismo de las conjeturas, convirtiéndolos en herramientas de investigación y experimentación, a lo cual se le denomina *matemáticas experimentales* y resulta ser un campo de grandes posibilidades que valen la pena de ser exploradas.[12]

Finalmente hay que tomar en cuenta que la Matemática, al igual que las demás ciencias, es una disciplina humana, desarrollada y creada por una comunidad, la *institución matemática* como le llaman Godino y Batanero (1994). La concepción de demostración y de los procesos aceptados de validación estará determinada por un "convenio" que se establezca al seno de dicha comunidad. Sin embargo, y dada la importancia epistemológica clave que la concepción de demostración ha tenido dentro de la Matemática desde hace varios cientos de años como método único de validación de su conocimiento, resultaría difícil modificar sustancialmente dicha concepción o añadir nuevos métodos de validación en un futuro.

Por el lado práctico, y aunque algunas civilizaciones antiguas, como la egipcia y la caldea, sí desarrollaron un conocimiento organizado y abstracto, el método deductivo tiene muchas más aplicaciones y bondades que sólo ser una inspección finita inductiva, pues proporciona y ha proporcionado certeza matemática.

En conclusión, la Matemática, como ciencia, utiliza a la demostración como su método de validación general, por lo que es una parte epistemológicamente fundamental para su desarrollo. Sin embargo, como se ha visto aquí, también se acepta que tiene otras funciones al ser un medio de convicción y convencimiento, por lo que, ante algunos

aquél que pueden jugar en el aprendizaje de la demostración (en contextos escolares o no), lo cual se mencionará más adelante.

[12] Al respecto se le recomienda al lector consultar el artículo de John Horgan (1993).

obstáculos para llevar a cabo un proceso lógico-formal, se han propuesto métodos alternativos de validación influenciados por el ambiente cultural y científico. Esto, junto con una revisión histórica, nos muestra que la noción demostración es un producto social que evoluciona y cambia, por lo que esto debería influir también en la definición de demostración desde el punto de vista de la institución de los enseñantes de la Matemática.

3.3.2. Sobre la enseñanza de la demostración

El otro enfoque que nos interesa señalar es el que se realiza desde la llamada *institución de los enseñantes de la Matemática*, pues es aquella en la que se desarrolla la temática del libro. En esta institución las prácticas relacionadas con la demostración no sólo están dirigidas hacia la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, sino también al desarrollo de argumentos que tienden a ser deductivos y al de otras habilidades relacionadas.

Hoyles y Jones (1998:121) sostienen que si se reduce el papel de la demostración a sólo una herramienta lógica de verificación de veracidad de una proposición, entonces los alumnos se encontrarán con serias dificultades conceptuales. Estas dificultades provienen en parte de la concepción de la demostración, pues aún las posturas no se han homogeneizado lo suficiente como para que la mayoría de los docentes estén de acuerdo sobre la manera de abordarla, sobre la profundidad que requiere y sobre su validez.

Además, existen problemas con respecto a los antecedentes académicos y conceptuales de los alumnos. Claudia Acuña (1996) plantea que los alumnos de ingreso al nivel medio superior, a pesar de que tendrán que argumentar y conjeturar, no tienen aún herramientas para enfrentarse a situaciones como estas o algunas otras como deducir o demostrar, pues todas sus herramientas mentales han sido desarrolladas para otro tipo de problemas, como el cálculo, la construcción y el uso de algoritmos. Tall (1992) insiste en que la construcción de una demostración requiere no únicamente el conocimiento de los conceptos u objetos matemáticos y las reglas lógicas, sino también una idea sobre las maneras en que interactúan entre sí, así como las razones por las que lo hacen.

Regresamos al sitio en el cual se afirma que desde el punto de vista didáctico no se puede considerar a la demostración tan sólo como un medio de validación lógica. Así pues, si las prácticas relativas a la demostración en la institución matemática son diferentes a aquellas realizadas en la institución de los enseñantes de la Matemática, entonces conviene hacer algunas diferencias entre ambas que pueden ir desde la misma terminología, tal como lo propone Nicolás Balacheff (1987:148) al establecer una diferencia entre "prueba" y "demostración" :

> "Llamamos **prueba** a una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Esta decisión puede ser objeto de un debate cuya significación es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores.
>
> "Al seno de la comunidad matemática no pueden ser aceptadas por pruebas más que las explicaciones que adoptan una forma particular. Son

> una serie de enunciados organizados siguiendo reglas determinadas: un enunciado es tomado como cierto o bien es deducido de aquellos que le preceden con la ayuda de una regla de deducción tomada de un conjunto de reglas bien definidas. Llamamos **demostración** a estas pruebas."

Los términos "prueba" y "demostración", que comúnmente son tomados como sinónimos, adquieren aquí una diferencia de acuerdo a la institución en la que se trabaja: una prueba es una validación para una comunidad dada en un momento dado, como por ejemplo la institución de los enseñantes de la Matemática, teniendo un carácter social; una demostración es una validación tan sólo para una comunidad en particular: la matemática. Además, otras diferencias que establece Balacheff son la necesidad del uso de un lenguaje adecuado, pasando de uno familiar a uno funcional, y un proceso de *descontextualización* de los ejemplos que permita pensar en términos de generalidad, de *despersonalización* a fin de que los resultados no dependan de la persona que realiza la demostración y de *destemporalización* para que la demostración tenga validez en todo momento.

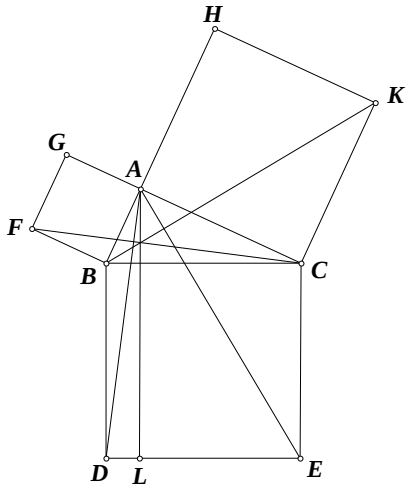
La relación que establecen Balacheff y Godino entre el significado de la demostración y la comunidad que lo utiliza nos lleva directamente a la necesidad de considerar que los criterios para determinar si una demostración es válida o no son los aceptados por la comunidad (en este caso la matemática) en turno a lo largo del desarrollo histórico. François Pluvinage evidencia el carácter falsacionista y social de la Matemática al señalar que "los matemáticos de hoy afirman que una demostración no es otra cosa sino lo que los matemáticos aceptan como demostración" (1996:77). Pero además se nota que la demostración ha cumplido con varias funciones a lo largo del tiempo, las cuales deben ser consideradas necesariamente en la Educación Matemática.

De hecho podemos hablar que, en término de la intencionalidad de una demostración, existen dos tipos básicamente (ver, por ejemplo, Hanna, 1989, 1996): las *demostraciones que prueban* y las *demostraciones que explican*. Hay que notar que esta clasificación es de las **demostraciones** como proceso que valida a una afirmación, y no de los **teoremas**, que son dichas afirmaciones; es decir, para un teorema en particular pueden existir varias demostraciones y, dependiendo de su estructura, contenido, intencionalidad y contexto, podrán ser clasificadas cada una de ellas en una u otra categoría, sin importar si las demás demostraciones quedan en la misma o no. Muchos educadores piensan que el segundo tipo es el más ilustrativo para ser utilizado en el aula de los cursos de Matemática, y de hecho podría ser desastroso no lograr establecer una diferencia entre ambos tipos dentro de la práctica docente y hacer que los alumnos se enfrenten de manera indistinta a ambos.

Consideremos los siguientes ejemplos.

Primeramente tomemos dos demostraciones, en Geometría, del comúnmente llamado "Teorema de Pitágoras" : *en un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido en el lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los otros dos lados*. La demostración que propone Euclides en *Los*

Elementos para este teorema (proposición 47 de su Libro I) podría ser clasificada dentro de las *demostraciones que prueban*:[13]



Sea *ABC* un triángulo rectángulo con el ángulo *BAC* recto; afirmo que el cuadrado en *BC* es igual a los cuadrados en *BA* y *AC*.

El cuadrado descrito en *BC* sea llamado *BDEC*, y en *BA* y *AC* los cuadrados *GB*, *HC*; a través de *A* sea *AL* trazada paralela a *BD* o *CE*, y sean unidos *AD* y *FC*.

Entonces, dado que cada uno de los ángulos *BAC*, *BAG* son rectos, se sigue que *CA* y *AG* están en la misma línea recta. Por la misma razón, *BA* está también en una línea recta con *AH*.

Y, dado que el ángulo *DBC* es igual al ángulo *FBA*, porque ambos son rectos, añadámosles el ángulo *ABC* a cada uno; por tanto el ángulo completo *DBA* es igual al ángulo completo *FBC*.

Y, dado que *DB* es igual a *BC*, y *FB* a *BA*, los dos lados *AB* y *BD* son iguales a los dos lados *FB* y *BC*, respectivamente, y el ángulo *ABD* es igual al ángulo *FBC*; por tanto la base *AD* es igual a la base *FC*, y el triángulo *ABD* es igual al triángulo *BC*.

Ahora, el paralelogramo *BL* es el doble que el triángulo *ABD*, porque tienen la misma base *BD* y están en las mismas paralelas *BD* y *AL*.

Y el cuadrado *GB* es el doble que el triángulo *FBC*, porque tienen la misma base *FB* y están en las mismas paralelas *FB* y *GC*.

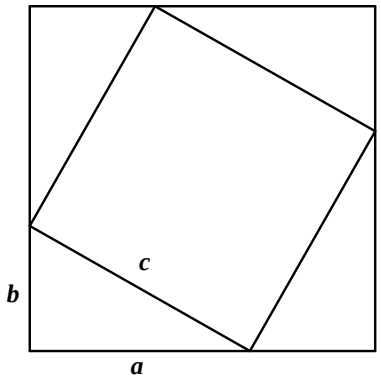
Por tanto el paralelogramo *BL* es también igual al cuadrado *GB*.

Similarmente, si *AE* y *BK* son unidos, el paralelogramo *CL* puede ser probado que es igual al cuadrado *HC*; por tanto el cuadrado completo *BDEC* es igual a los dos cuadrado *GB* y *HC*.

Por tanto el cuadrado en el lado *BC* es igual a los cuadrados en los lados *BA*, *AC*. Q.E.D.

[13] Esta demostración ha sido tomada de la edición de Thomas L. Heath (1956:349-350) publicada por Dover Publications.

En cambio, en las escuelas de nivel medio abundan las demostraciones que buscan explicarle a los alumnos **por qué** funciona siempre esta afirmación, como por ejemplo: Tomemos un triángulo rectángulo cuyas medidas de los lados sean *a*, *b* y *c*, donde las dos primeras son las de los lados adyacentes al ángulo recto (los catetos) y la última corresponda al lado que es opuesto a dicho ángulo (la hipotenusa); construyamos un cuadrado utilizando otros tres triángulos congruentes con el primero como se muestra a continuación:



Se observa que el área del cuadrado es $(a+b)^2$, ya que cada lado del cuadrado mide $a+b$. Pero también es posible calcular el área del cuadrado de otra manera: sumando las áreas de los cuatro triángulos ($^1/_2\ ab$ cada uno) y el área del cuadrado interior (cuya área es c^2), por lo que se puede establecer la siguiente igualdad:

$$(a + b)^2 = 4(^1/_2\ ab) + c^2$$

que desarrollada queda como:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

y, finalmente, simplificando se obtiene:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Es posible observar que, en un afán de explicar por qué sucede lo que se afirma en el teorema, se llega a utilizar como herramienta un lenguaje (el algebraico) que inicialmente no tenía nada que ver con el tema, es decir, con la Geometría.

El segundo ejemplo es de carácter netamente algebraico. Consideremos el teorema según el cual se establece que la suma de los primeros *n* números enteros positivos es igual a la expresión $\frac{n(n+1)}{2}$, es decir que $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Una demostración existente se obtiene al utilizar la inducción matemática, la cual se puede considerar como una *demostración que prueba (o que verifica)* pues, por un lado, la noción misma de la inducción matemática resulta frecuentemente difícil de comprender por parte de los alumnos de todos los niveles y, por otro lado, generalmente al utilizar este método de demostración es necesario tener de antemano la propiedad (en este caso una expresión, o fórmula, utilizada para calcular una suma) antes de comenzar el proceso y entonces la intención es básicamente verificar.

Otra de las demostraciones que aparecen en los cursos de nivel medio, y que podría encajar en las demostraciones del tipo *que explican*, consiste en tomar la suma que se está considerando y manipular el orden de sus sumandos, reacomodándolos a conveniencia, pero sin perder de vista que es precisamente una suma. Además, de esta manera es posible, a partir de un enunciado que contenga una solicitud del tipo «*¿cómo calcular la suma…?*», "construir" y obtener la fórmula correspondiente.

Hay que considerar dos casos: cuando *n* es par y cuando *n* es impar.

En el primero caso (*n* es par) se colocan los primeros *n* números enteros positivos en una tabla de dos renglones como sigue: en el primer renglón se colocan (ordenados ascendentemente de izquierda a derecha) la primera mitad de los números, es decir, del 1 al $\frac{n}{2}$; en el segundo renglón se colocan (ordenados ascendentemente de derecha a izquierda) la segunda mitad de los números:

1	2	…	$\frac{n}{2}$
n	$n-1$	…	$\frac{n}{2}+1$

Es posible observar que se usan $\frac{n}{2}$ columnas en la tabla y que la suma de cada una de ellas es igual a n+1. Por tanto la suma total S de los números en la tabla es el producto del total de las columnas por la suma de cada una de éstas, es decir

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para el caso de que *n* sea impar se procede de manera similar, construyendo una tabla y colocando números en ella. La diferencia estriba en que el primer renglón comienza con el 0 y termina con el número $\frac{n-1}{2}$ (recordemos que *n* es impar, por lo que $n-1$ es par); mientras que en el segundo renglón se colocan los demás números hasta *n* (ordenándolos ascendentemente de derecha a izquierda). El resultado es una tabla como la siguiente:

0	1	2	…	$\frac{n-1}{2}$
n	$n-1$	$n-2$	…	$\frac{n+1}{2}$

Se observa que, por haber añadido al 0, se tienen $\frac{n+1}{2}$ columnas, cada una de las cuales tiene como suma *n*. Por tanto, la suma total S es nuevamente el producto de ambas expresiones, es decir

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Por otro lado se puede hablar de las funciones que cumple una demostración, tanto desde el punto de vista de la comunidad matemática como del ámbito de la Educación Matemática. Nótese que no se habla de una única función de verificación, pues se pueden identificar otras funciones posibles de la demostración como son las siguientes:

- *Como verificación*, que es cuando se utiliza para plantear la verdad un enunciado. Esta parecer ser la función que comúnmente se le atribuye a la demostración, pues está ligada con el significado que "tradicionalmente" se le otorga en la institución matemática. Michael de Villiers (1993) propone que esta función está junto con la de convicción, pero él mismo establece que no son equivalentes pues una verificación de la verdad de un enunciado no necesariamente lleva a una convicción y viceversa, por lo que se han separado. Daniel Chazan (1993) evidencia este hecho al mostrar en su trabajo que los alumnos confunden lo que es una prueba con una compilación de evidencias a través de conductas en las que:

  $\Rightarrow$ La evidencia empírica se convierte en una prueba para el alumno al hacer generalizaciones de casos particulares, pero con la necesidad de verificar todos los casos.

  $\Rightarrow$ La prueba no es más que una evidencia más para el individuo al considerar que representan un solo caso, no comprendiendo el principio de generalización y de que la validez se aplica a todos los casos que cumplen la hipótesis. En estos casos que reportó Chazan la prueba no les proporcionó a los alumnos la suficiente seguridad contra los contraejemplos o bien no existe un entendimiento de la estructura o intención de la prueba ("se basa en supuestos" o "su escritura generalmente es en singular").

  Es decir, según Chazan, en esos casos tal parece que no es la prueba la que les proporciona a los alumnos una convicción del hecho, sino los ejemplos.

- *Como convicción*, que es cuando se utiliza como un medio para convencerse de que un hecho es verdad, lo cual está relacionado con la comprensión de la estructura interna de una demostración y con la función explicativa de la demostración que se menciona a continuación.

- *Como explicación*, cuando proporciona una idea del por qué un enunciado es verdadero. Este sentido de explicación, ligado íntimamente con la función mencionada arriba y con la siguiente, es en el sentido de Hanna al ser una demostración no sólo un proceso que establece la veracidad de una afirmación, sino que también muestra la razón por la que ocurre el hecho afirmado, es decir, "la prueba revela y hace uso de las ideas matemáticas que la motivan" (Hanna, 1989:47). De hecho esta función es necesaria en la misma comunidad matemática pues, según Thurston (1994), la razón de que algunas demostraciones sean rechazadas, como es el caso del teorema (o conjetura) de los cuatro colores, es porque utilizan herramientas que no permiten cumplir con "un deseo continuo por una *comprensión humana* de una prueba, en adición al conocimiento de que el teorema es verdadero" (pág. 162).

- *Como medio de comunicación*. La demostración se puede convertir en un medio de comunicación al permitir compartir los resultados obtenidos y explicarlos.

Recordemos que Balacheff circunscribe a las pruebas y las demostraciones en el conjunto más grande de las *explicaciones*, es decir, en procesos que no sólo validan hechos, si que también buscan "hace inteligible a otro la verdad, ya adquirida por el hablante" (Arsac, 1988:249). En otras palabras, la demostración como producto social es un medio de comunicación para proporcionar explicaciones de los hechos (ver Chazan, 1993).

Así pues, la interacción social del individuo tiene una importancia relevante en el proceso de construcción de la demostración, pues permite exponer argumentos por parte de un individuo para convencer a otro. Sin embargo, a pesar de que esta interacción puede resultar en un instrumento potente que sirve para favorecer los procesos de devolución a los alumnos de la responsabilidad matemática sobre sus actividades y producciones, existe la posibilidad de que los diferentes niveles de razonamiento que puedan tener los individuos que participen en dicha interacción se convierte en un obstáculo por malos entendidos, falta de consensos e intentos de que las opiniones de algunos prevalezcan sobre las de otros sin entendimiento claro del por qué (Balacheff, 2000).

- *Como sistematización*, que es cuando se plantean varios resultados dentro de un sistema de axiomas o teoremas. Tal es el caso, por ejemplo, de la demostración de enunciados que a primera vista resultan evidentes y que no despiertan ninguna necesidad inmediata de una validación lógica. No obstante, por la misma naturaleza de la Matemática en ocasiones se hace necesaria una sistematización que obliga a considerar estas demostraciones.

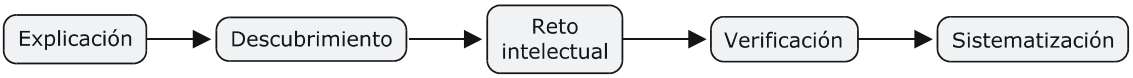
- *Como descubrimiento*, que ocurre cuando se descubren o inventan nuevos resultados durante la construcción de alguna demostración. Esta función está presente cuando al llevar a cabo los pasos lógicos para la construcción de una cierta demostración se encuentra como consecuencia lógica de las mismas hipótesis un resultado que no se tenía contemplado. Balacheff considera adecuado manejar esta posibilidad como un medio para darle el reconocimiento adecuado a la demostración:

  > "Si los estudiantes ven la meta como 'hacer', más que como 'conocer', su debate se enfocará más en la eficiencia y la fiabilidad que en el rigor y la certeza. Así de nuevo las conductas argumentativas podrían ser vistas como más 'económicas' que matemáticamente comprobables." (Balacheff, 1991a:189)

- *Como reto intelectual*, que ocurre cuando el individuo se plantea a sí mismo o le es planteado el desafío de obtener la demostración de una afirmación. Hay que hacer la aclaración de que esta función no ocurre cuando un profesor simplemente le pide al alumno que demuestre algo, sino que es cuando el individuo se involucra activamente en el proceso de construir la demostración (sea producto de una exigencia interna o externa).

La identificación de estas funciones, hay que decirlo, no implica que una demostración en particular, por ejemplo la propuesta por Euclides para el Teorema de Pitágoras, cumpla una y sólo una función. Una demostración en particular, dependiendo

del contexto, del momento, del uso que se le dé e, incluso, de la persona que la esté utilizando (construyendo o leyendo), podrá tener una u otra función. Por ejemplo Michael de Villiers (2000) propone dentro de un contexto geométrico un orden para introducir las funciones de la demostración al aula de clases que podría ser más o menos de acuerdo al siguiente esquema:



Por otro lado, también hay que considerar el grado del rigor utilizado, pues éste dependerá tanto del nivel en el cual se trabaja, como del hecho de no sacrificar la comprensión:

> "En cada caso es una cuestión de grado de rigor. En la práctica didáctica no es necesario perseguir formas de rigor absoluto, sino suficiente rigor para favorecer la comprensión y para convencer." (Hanna, 1996:33)

Esto quiere decir que el acento de la demostración matemática en el entorno escolar no queda en su estructura, sino en su *sentido*. Como dice David Tall (1992), lo que queda escrito en la demostración es sólo "la punta del iceberg" y no refleja completamente todo el proceso previo de pensamiento matemático en el cual se plantearon conjeturas, se realizaron argumentaciones, se exploraron caminos y se desarrolló un conocimiento por parte del individuo, el cual posiblemente no fue lo suficientemente riguroso (desde el punto de vista científico), pero quizá haya sido más importante dicho proceso que la precisión matemática obtenida.

Hacer de la demostración el método de validación aceptado por los estudiantes es precisamente el reto. Michael de Villiers (1995) enfatiza el riesgo de que los alumnos no sientan la necesidad de utilizarla en ambientes computacionales, pues éstos los involucran en ambientes heurísticos parecidos a los que propuso George Polya, apareciendo conductas como las que menciona Daniel Chazan, y a las que ya se hizo referencia arriba, de aceptar a la evidencia como prueba.

Algunos educadores, como Barbi y Giannini (1997), hacen la observación de que así se convierte a la Geometría, al utilizar software para Geometría Dinámica, en una disciplina semi-empírica, y advierten además la diferencia entre una observación y una demostración. No obstante, algunos trabajos en esta área apuntan hacia el hecho de que el uso de estas herramientas computacionales podría ser un camino para la construcción de demostraciones (ver por ejemplo Zanarini, 1994; Barozzi, 1995; De Villiers, 1995; Barbi y Giannini, 1997; Pioli, 1998; Arzarello, Olivero, Robutti y Paola, 1999; Furinghetti y Paola, 2003; Olivero, 2003b).

Lo interesante sería el determinar si es posible plantear la conjetura que se desea trabajar basándose en observaciones inductivas con el uso de la computadora, para posteriormente intentar hacer que el alumno realice una demostración, buscando a través de contraejemplos y casos "monstruosos" que desarrollen una necesidad basada en la conciencia de que las justificaciones empíricas no son suficientes ni confiables.

Diversas aproximaciones se han realizado para enfrentarlo y una es a través del estudio de lo que hacen los alumnos, o los individuos, al enfrentarse a la construcción de la demostración, particularmente en el ambiente escolar que, en gran medida, es del

interés de la institución de enseñantes de la Matemática. Harel y Sowder (1998) realizaron un estudio que considera más que nada lo que ellos llaman los *esquemas de prueba*, el cual definen de la siguiente manera: "un esquema personal de prueba consiste de lo que constituyen la determinación y la persuasión para esa persona"[14] (pág. 244), y así propusieron una categorización que, más que con el contenido de las demostraciones, tiene que ver con los esquemas personales para convencerse de un hecho al eliminar las dudas que tiene al respecto. Esta clasificación contempla tres categorías principales:

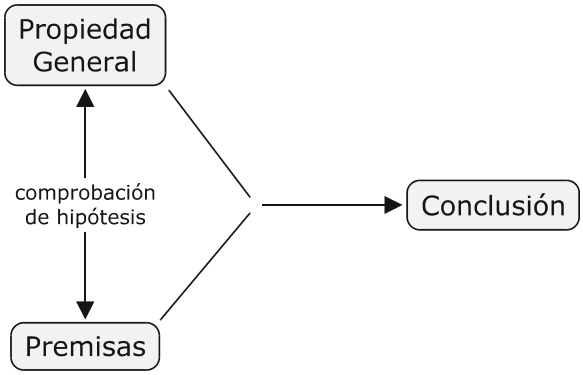
- Esquemas *de convicción externa*, los cuales se generan por fuentes externas al individuo y que pueden provenir de una autoridad como un profesor o un libro, del uso de símbolos y del uso de rituales relacionados con la forma, no por lo correcto de la prueba.
- Esquemas *empíricos*, los cuales aparecen cuando se utilizan esquemas en los que la validez se centra en el análisis cuantitativo de algunos casos o con el uso de imágenes rudimentarias que no aceptan transformaciones mentales o que no permiten anticipar los resultados de tales transformaciones.
- Esquemas *analíticos*, que involucran transformaciones mentales por medio de la deducción o bien que acuden al uso de la justificación matemática con la capacidad de manejar sistemas axiomáticos, que van desde un nivel intuitivo hasta uno en el cual es posible plantear una estructura axiomática completa.

Esta categorización de esquemas tiene posibilidad de ser considerada en la institución de enseñantes de la Matemática, pero también se admite que puede ser aplicada en otras instituciones ya que, en última instancia, son esquemas personales de prueba y no de enseñanza.

En particular se propone aquí que una demostración para el nivel medio es una justificación de un hecho matemático que está basado en argumentos deductivos que tienen como principal función convencer (al interlocutor y a los que le rodean) y explicar dicho hecho, y cuyas estructuras (de los argumentos y de cómo están estructurados entre sí éstos) tiene la forma de una argumentación deductiva.

Para precisar, con *argumentación deductiva* me refiero a aquélla que está basada en el razonamiento deductivo, el cual tiene una estructura ternaria en el que intervienen las premisas (que contiene las hipótesis), una propiedad general (que incluye al menos una implicación) y la conclusión (que incluye una nueva proposición):

[14] El término *ascertaining* (*determinación*) estos autores lo definen como "el proceso que emplea un individuo para remover sus propias dudas acerca de la verdad de una observación", y el término *persuading* (*persuasión*) se refiere a "el proceso que emplea un individuo para remover las dudas de otros acerca de la verdad de una observación" (pág. 241).



Así que las hipótesis de las premisas son validadas en la propiedad general, entonces se lleva a cabo una "sustitución" en ésta última del caso particular y se realiza la deducción considerando la implicación que existe en la propiedad general. Hay que decir que tal "propiedad general" puede ser una observación ya realizada y que ha sido supuesta como verdadera aunque no se haya validado utilizando otra deducción, siendo entonces el caso de una deducción local.

Finalmente, y a pesar de que no existe un consenso general en la comunidad escolar sobre la enseñanza de la demostración que considere la importancia epistemológica que tiene la demostración matemática en la disciplina, resulta necesario tomarla en cuenta, con todos sus elementos, en el proceso escolar. Es un reto que plantea Gila Hanna (1996) y el riesgo de no enfrentarlo lo expresa de la siguiente manera:

> "Fallar en esto nos privaría de un instrumento didáctico válido y a nuestros estudiantes de un elemento crucial de las matemáticas." (Pág. 32)

Es por ello que en los siguientes capítulos se proponen algunas actividades dirigidas al aprendizaje de la demostración, pero primero se abordarán algunas investigaciones en Didáctica de la Matemática que proporcionan elementos teóricos y prácticos interesantes a ser considerados.

4. ALGUNOS ESTUDIOS DIDÁCTICOS QUE INVOLUCRAN EL PAPEL DE LAS CONJETURAS EN EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN

Para lo único que sirve la escuela
es para aprobarla.
ALEXANDER BELL O.

El objetivo primordial de la educación matemática debiera ser el desarrollo de la intuición, a fin de convertirla en una herramienta utilizable.
IAN STEWART
[*Conceptos de matemática moderna*, 16]

En el campo de la Educación Matemática, durante los últimos veinte años, se ha llevado a cabo un amplio trabajo de investigación didáctica sobre la demostración y los elementos que están en juego durante su aprendizaje y su enseñanza. Los enfoques han sido distintos y hay quienes afirman que algunos medios son adecuados para llegar a lograr que un grupo de alumnos elaboren la demostración de un enunciado matemático, mientras que otros investigadores afirman que no y proponen otros medios.

En medio de todas estas propuestas se hallan las conjeturas, que no siempre han sido tratadas de manera explícita y, por lo general en esos casos, su papel, aunque se reconoce, resulta implícito y se asume de una manera tácita.

Se presentan en este capítulo cuatro de las posturas más importantes que actualmente existen, para lo cual han sido escogidos los investigadores cuyas aportaciones a lo largo de estos últimos años han influido notablemente en el pensamiento y dirección de las investigaciones sobre este rubro.

De esta manera, la primera sección está dedicada al trabajo que ha realizado Nicolás Balacheff, pues se le ha considerado como un punto de referencia para el estudio didáctico de la demostración matemática. La siguiente sección está dedicada al trabajo que ha realizado sobre las diferencias existentes entre los procesos argumentativos y demostrativos el francés Raymond Duval. La tercera sección incluye las reflexiones realizadas por Efraim Fischbein, principalmente recalcando los aspectos relacionados con la intuición y su relación con la demostración. En la última sección del capítulo se toman las conclusiones a las que han llegado un grupo de didactas italianos de las universidades de Turín y Pisa, principalmente, sobre la unidad cognitiva que presentan los teoremas matemáticos en su aprendizaje.

El orden en el que aparecen estos trabajos, como podrá apreciar el lector, no es del todo casual ni cronológico. Se parte del trabajo de investigación que es considerado como el iniciador en el estudio del aprendizaje de la demostración, para después añadir elementos esenciales que intervienen como es la argumentación y la intuición, incluyendo el estudio estructural de estos elementos con respecto a la demostración.

Finalmente se cierran estas aportaciones con el producto de un estudio epistemológico e histórico que involucra los aspectos anteriores y una aproximación cognitiva a la demostración.

4.1. Prueba y demostración

Nicolás Balacheff resulta ser un punto de referencia obligado en el estudio de la demostración en la Matemática desde el punto de vista didáctico, por lo que se hace indispensable incluir algunas de sus ideas más relevantes.

Este autor, en su Tesis de Estado (1988) centra su postura en que el conocimiento del individuo se desarrolla o progresa a través de pruebas y refutaciones, en sintonía con los desarrollos históricos de la disciplina. Expone un análisis histórico que empuja a pensar y considerar el proceso demostrativo como una metodología de prueba y error, es decir, que la historia y desarrollo epistemológico de la Matemática proporciona un punto de referencia para conocer, analizar e interpretar el desarrollo intelectual del alumno. Es por ésto que el modelo de desarrollo piagetiano es consistente con el modelo propuesto por Imre Lakatos, el cual que muestra la importancia de la dimensión social de la dialéctica prueba-refutación (Balacheff, 1991b).

Considera que la interacción social del individuo tiene una importancia relevante, lo cual lleva a los alumnos a realizar discusiones de su conducta para convencerse unos a otros de los argumentos de cada uno. Esta interacción social puede resultar en un instrumento potente que sirve para favorecer los procesos de devolución a los alumnos de la responsabilidad matemática sobre sus actividades y producciones, al tiempo de favorecer la aparición de procesos de demostración en los alumnos (Balacheff, 1991a, 1999); sin embargo, también hace la advertencia de que en el caso de alumnos con diferentes niveles de razonamiento tal interacción se convierte en un obstáculo por malos entendidos, falta de consensos e intentos de que las opiniones de algunos prevalezcan sobre las de otros (Balacheff,2000). Además, hay que considerar no sólo el ámbito social, sino a los alumnos en relación con el contexto en general.

Esto permitirá el aprendizaje en dos niveles (Balacheff, 1991b):

- Que los estudiantes aprendan Matemática como un conocimiento social.
- Que después de los primeros pasos, y al perder la Matemática su interacción con el entorno físico, el alumno confronte sus modelos cognitivos con los de otros estudiantes y con los del profesor.

Para realizar estos análisis Balacheff distingue entre *razonamiento*, *proceso de validación*, *explicación*, *prueba* y *demostración*:

- Un *razonamiento* comprende una actividad intelectual, por lo general no completamente explícita, de manipulación de información dada o adquirida, para producir nueva.
- El *proceso de validación* es la actividad a través de la cual se asegura la validez de una proposición y posteriormente de producir una explicación. Este proceso tiene un carácter dialéctico, es decir, se confrontan argumentos a favor y en contra.

- La *explicación* es un intento personal para autoconvencerse de la validez de una proposición. Se usa el conocimiento propio y se siguen reglas propias de decisión. No obstante, finalmente está dirigido a hacer inteligible a otro la verdad.

  Consideremos la siguiente situación que R. Iaderosa, en su trabajo *L'avvio alla dimostrazione nella scuola dell'obbligo*,[15] presenta (citado por Pioli, 1998:82-83):

  > "Jorge y Federica discuten sobre la siguiente afirmación hecha por el profesor en clase: *Si un número es múltiplo de 6 entonces es también múltiplo de 3.* Jorge está convencido que es verdadera, pero debe encontrar el modo de explicar el por qué a Federica que no quiere convencerse que siempre sea así. ¿Quieres ayudarlo, explicando si es verdadera o falsa el por qué de manera convincente?"[16]

  Iaderosa, basando su análisis en los trabajos de Balacheff, presenta como ejemplo de explicación la siguiente respuesta de un alumno:

  > "*Si un número es múltiplo de 6 entonces es también múltiplo de 3: esta afirmación es verdadera porque, hagamos una hipótesis: si el número es 12, y efectivamente 12 es múltiplo de 6, y vemos que 12 es también múltiplo de 3. Y es así también para todos los demás múltiplos de 6.*"

  Es interesante observar que el alumno razona primero sobre un ejemplo y después, con base en éste, busca la generalización. De hecho, este proceso es un intento del sujeto por aclararse a sí mismo la validez de la proposición antes que nada.

- Una *prueba* es "…una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado" (Balacheff, 1987:148). Esto quiere decir que la prueba es una explicación socialmente aceptada, pero también tiene un status no definitivo y puede evolucionar a la par con la evolución del conocimiento en el que está basado.

  Nuevamente a manera de ejemplo se muestra la respuesta de otro alumno ante la misma situación que Iaderosa presenta y que se ha mencionado en la página anterior:

  > "*Si un número es múltiplo de 6 es múltiplo también de 3 porque 6 es múltiplo de 3.*" (Citado por Pioli, 1998:83)

  Balacheff distingue dos tipos de pruebas: las *pruebas para decidir*, que les llama *prácticas* o *pragmáticas*; y las *pruebas para saber*, llamadas *teóricas* o *intelectuales*:

  A) Las *pruebas pragmáticas* se refieren a hechos en sí, pues se integran a la acción. "Está hipotecada por la singularidad del evento que la constituye, y hay que, (además), aceptar el carácter genérico. Es en suma tributaria de un

[15] Este trabajo es la *Tesi di Perfezionamento in Didattica della Matematica* que la autora presentó en la Universidad Católica de Brescia en 1994.

[16] En realidad la situación que cita Piola sobre el trabajo de R. Iaderosa presenta dos afirmaciones hechas por el profesor, pero aquí se ha omitido la segunda afirmación para únicamente ejemplificar, adecuando la redacción del texto.

contingente material: herramientas imprecisas, falta de funcionamiento, entre otros." (Acuña,1996:96)

B) Las *pruebas intelectuales* movilizan significaciones, pertinencias o racionalidades unas contra otras.

Según Balacheff el paso de las pruebas pragmáticas a las intelectuales es como una "confrontación entre la eficiencia y el rigor" a un nivel conceptual mediante la toma de conciencia de los aspectos genéricos. Se habla de cuatro etapas para realizar este paso:

El empiricismo ingenuo, que consiste en considerar la validez de un enunciado después de verificar algunos casos.

La experiencia crucial, que consiste en una experimentación concebida para probar dos hipótesis y, a partir del resultado, rechazar una y dejar abierto el problema de la validez de la otra.

El ejemplo genérico, que consiste en la explicación de los motivos de la validez de un enunciado realizando operaciones y transformaciones sobre un objeto, en un ejemplo, pero considerándolo no como un caso particular, sino como un representante de una clase.

La experiencia mental, que consiste en evocar un acción, interiorizándola y sacándola del contexto y de una representación particular.

- Una *demostración* la explica de la siguiente manera: "Al seno de la comunidad matemática no pueden ser aceptadas por pruebas más que las explicaciones que adoptan una forma particular. Son una serie de enunciados organizados siguiendo reglas determinadas: un enunciado es tomado como cierto o bien es deducido de aquellos que le preceden con la ayuda de una regla de deducción tomada de un conjunto de reglas bien definidas. Llamamos **demostración** a estas pruebas" (Balacheff, 1987:148). Es decir, este autor "…coloca el acento sobre el *sentido* de la demostración, es decir, su función como herramienta de validación en la comunidad matemática" (Arsac, 1988:249), pero también también acepta su aspecto sintáctico: "Lo que caracteriza a las demostraciones como género del discurso es su forma estrictamente codificada" (Balacheff, 2000:13).

El paso de una prueba a una demostración, según Balacheff, involucra al individuo en el uso de un lenguaje adecuado, pasando de uno familiar a uno funcional. En general, se plantea este proceso en tres pasos:

1. la *descontextualización* de los ejemplos, lo que permite una generalidad;
2. la *despersonalización* a fin de que los resultados no dependan de la persona que realiza la demostración; y
3. la *destemporalización* para que la demostración sea perenne.

Cuando se realiza este proceso de paso de un tipo a otro tipo de validación (de la prueba a la demostración) puede ocurrir que las conjeturas (las afirmaciones que se validarán) se enfrenten a contraejemplos, pues hay que recordar el carácter dialéctico

que le otorga Balacheff a los procesos de validación. Cuando ocurre ésto, puede suceder que:

- se abandona la conjetura y se busca otra vía;
- se modifica la conjetura y cambia el dominio de validez de los objetos estudiados;
- se subdivide la conjetura para ver cuál de estas subconjeturas es la que no funciona; o
- se refuta el contraejemplo, retomándose las definiciones que conoce el alumno y verificándolas nuevamente.

En cuanto a la argumentación, Balacheff no la considera un camino directo hacia la construcción de la demostración, pues en primer lugar, considera que tienen objetivos distintos. La argumentación le otorga el objetivo de obtener el acuerdo de un compañero, más que de establecer la verdad de un enunciado, ya que, dado el carácter de la prueba matemática y a diferencia de otras disciplinas, la demostración busca una validez a través de la descontextualización del discurso, la desaparición del actor y del tiempo (Balacheff, 1991a, 1999).

También quedan involucrados elementos relacionados con el rigor propios de la prueba matemática y su inexistencia en la vida diaria de los alumnos, incluyendo en sus comportamientos argumentativos. De esta manera la interacción y el debate no garantizan la producción de la prueba porque para resolver un problema hay que ser eficiente y no necesariamente riguroso, hay que producir una solución y no necesariamente conocimiento. Una visión de este tipo resulta ser un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la demostración:

> "Si los estudiantes ven la meta como 'hacer', más que como 'conocer', su debate se enfocará más en la eficiencia y la fiabilidad que en el rigor y la certeza. Así de nuevo las conductas argumentativas podrían ser vistas como más 'económicas' que matemáticamente comprobables" (Balacheff, 1991a:189).

Es decir, que a pesar de que la interacción social puede favorecer la aparición en los alumnos de los procesos de comprobación, resulta que al estar potencialmente involucradas estas conductas argumentativas en toda interacción humana, también puede resultar ser un obstáculo epistemológico. Sin embargo, para los alumnos las conductas argumentativas juegan un papel mayor y quedan por encima de otras. Por ejemplo, para los alumnos un contraejemplo a una afirmación resulta ser sólo una objeción, por lo que "mereciera" revisarse la "prueba" de dicha afirmación; pero en realidad un contraejemplo es una contradicción.

No obstante, Balacheff no elimina estas conductas completamente del quehacer matemático, pero más bien lo delimita: "si bien no hay argumentación matemática, existe sin embargo una argumentación en matemáticas" (Balacheff,1999:4). Pero toma la postura de que las relaciones que establecen, a diferencia de otras posturas, son de una naturaleza compleja:

> "Prefiero proponer que se reconozca la existencia de una relación compleja y constitutiva del sentido en cada una de ellas:[17] la argumentación se constituye en obstáculo epistemológico al aprendizaje de la demostración, y más generalmente de la prueba en matemáticas." (Balacheff, 1999:5)

De hecho, plantea que algunas de las dificultades para aprender y enseñar la demostración en la Matemática están formuladas en términos del contrato didáctico, además de estar involucrado el papel de la naturaleza y el estado de los conocimientos implicados, incluyendo los antecedentes escolares del alumno relacionados con el raciocinio.

Por tanto, según Balacheff, para enseñar la demostración tiene que existir una negociación a fin de que se dé la aceptación por parte de los alumnos de nuevas reglas. Esta negociación es la clave del proceso por dos razones:

1. Porque la situación de enseñanza no puede ser entregada "abierta" a los alumnos, es decir, no se les puede dejar en completa libertad y sin ninguna dirección por parte del docente. Algunos de los estudiantes no sabrían qué hacer o no entenderían y se perderían.
2. Porque las reglas a seguir no pueden ser declaradas explícitamente, pues de otro modo algunos alumnos las discutirían o las evadirían, como ocurre con las leyes.

De esta manera hay que tomar en cuenta las condiciones en las que se da el aprendizaje, el contexto, la interacción social, los antecedentes de los alumnos, entre otros factores. Hay que considerar que los conocimientos que requieren los matemáticos para su labor, en general, es muy similar entre ellos, mientras que los estudiantes no, varían de uno a otro, y el hecho de que usen un empirismo ingenuo o validaciones pragmáticas hace relevante este hecho. Además, según Balacheff, para un estudiante el término *demostrar* se asemeja mucho al de *resolver*.

Finalmente, Balacheff aconseja a los docentes en su trabajo:

> "No limitar el tratamiento de la amplia, compleja y difícil temática del aprendizaje de las demostraciones a un momento particular de la vida escolar de los alumnos, sino de iniciarlo desde los primeros pasos en el mundo de la escuela" (citado por D'Amore, 1999:341).

4.2. Argumentación y demostración

Por su parte, Raymond Duval tiene principalmente dos campos de investigación en Didáctica de la Matemática: la diferencia de los registros semióticos y la diferencia entre argumentación y demostración, éste último campo es el que expondremos en esta sección.

Este autor expone que existen varias aproximaciones didácticas al estudio de la demostración, entre las cuales presenta tres:

[17] Aquí Balacheff se refiere a la tesis de continuidad, que trataremos más adelante al hablar de los trabajos de Paolo Boero y el equipo de investigadores que dirige en Italia; y a la tesis de ruptura, que propone Raymond Duval y que comentaremos en la siguiente sección.

- privilegiando el aspecto lógico del razonamiento,
- privilegiando el aspecto epistemológico de los objetos, o
- privilegiando el aspecto funcional de los procedimientos.

El primer acercamiento, **centrado en la lógica**, se basa en dos nociones: la operación lógica, que se refiere al hecho de que el uso de los conectores lingüísticos y la práctica con los operadores proposicionales debía abrir el camino hacia el razonamiento matemático; y la noción de independencia entre la forma y el contenido, que es la diferencia entre el razonamiento y la explicación, pues la primera se centra en la forma y la segunda en el contenido. En este caso, pues, se hace necesario separar el contenido semántico de la forma lógica.

En el acercamiento **centrado en la epistemología** se toma una postura opuesta a la anterior y se pone mayor atención en el contenido de las situaciones matemáticas que en la aproximación lógica. Ésto es porque la demostración en la Matemática aparece dentro de una actividad completa de la cual no debe ser separada y el procedimiento del razonamiento es un aspecto de la demostración, y no el más importante porque la posibilidad de desarrollar un razonamiento depende del descubrir propiedades y relaciones que justifiquen las conclusiones.

En este tipo de acercamiento el discernimiento de las hipótesis necesarias para la demostración es una parte importante, pues ésta es la fase decisiva de la demostración en sí, la cual depende no sólo de los métodos de razonamiento, sino también de los conocimientos de que dispone el sujeto y sus habilidades para manejarlos.

Duval hace la observación de que cuando se privilegia este aspecto la demostración queda inmersa en situaciones matemáticas y es considerada como la resolución de un problema. Entonces es necesario preparar a los alumnos con actividades inmersas en situaciones matemáticas.

La aproximación **centrado en el aspecto funcional** pone en evidencia lo que es necesario para que un razonamiento o una demostración tengan su función de razonamiento o demostración a los ojos del alumno a fin de que pueda convencer, ya que una demostración o un razonamiento no prueba nada para alguien si no cambia o refuerza una tesis en dicha persona. Las situaciones en las cuales el razonamiento ocupa este papel son en las situaciones sociales de discusión con un interlocutor o en debate, y siendo que la función real del razonamiento no puede disociarse de estas situaciones entonces el descubrimiento de la función, o de lo que es, la demostración viene dada en la dinámica de tales situaciones. Por lo anterior, esta aproximación se le conoce también como una *aproximación socio-funcional del razonamiento*.

Sin embargo, según Duval, este último tipo de actividades y situaciones no puede más que desarrollar una forma específica de razonamiento,:la argumentación.

Existen, según el autor, dos puntos en común en estas tres aproximaciones:

- existe una concepción demasiado unilateral y demasiado estrecha de razonamiento; y

- la enseñanza y la práctica están encuadrados según los registros semióticos de representación, es decir, a pesar de que en las tres aproximaciones las actividades que se proponen son diferentes, cada una de ellas privilegian un registro semiótico en perjuicio de los demás.

Por ésto, se llega a considerar que estas aproximaciones son "monoregistradoras" y ésto representa un factor importante de fracaso.

Duval ha visto que para los alumnos, y especialmente al inicio de su escuela, las diferencias que perciben entre argumentar y demostrar no son muchas, de hecho son casi sinónimos. Cosa que no ocurre ya en la mente del docente. Esto sucede por varias razones, una es porque a pesar de las diferencias poseen formas lingüísticas semejantes, haciendo que los alumnos opten por irse hacia los argumentos semánticos, propios del argumentar, y no los sintácticos, que están más relacionados con el demostrar. Además, en la vida diaria, e incluso en algunas materias escolares, el alumno argumenta para sustentar y validar sus hipótesis. Por ello, Duval sostiene que es necesaria una didáctica específica para el pasaje de la argumentación a la demostración, la cual debe ser explícita y reflexiva.

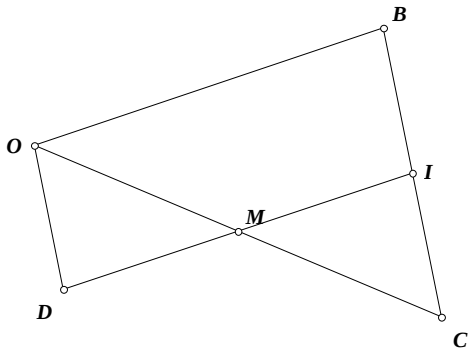
Las argumentaciones deben contar con dos características para ser aceptadas:

- Pasar un examen de *pertinencia*, que se hace en relación al contenido de la afirmación y el argumento que lo justifica, es decir, los contenidos semánticos tanto del enunciado como del argumento deben sobreponerse.
- Resistir a las objeciones y tener un valor epistémico positivo para ser un argumento *fuerte*.

Asimismo, las argumentaciones están ligadas con las *explicaciones*, que Duval maneja como producción de razones que "… da una o más razones para volver comprensible un dato. (…) Estas razones propuestas tienen en realidad una función casi descriptiva" (Duval, 1999b:9).

Por ejemplo, Duval presenta el siguiente problema:

> "*Sean O, B, C tres puntos no colineales. Sea I el punto medio de BC y D el punto tal que OBID es un paralelogramo. Se indica con M el punto medio de ID. ¿Por qué M es el punto medio de OC?*"



Y un alumno presenta la siguiente respuesta, que Duval identifica como una argumentación:

"Si ODCI es un paralelogramo, entonces sus diagonales se encuentran en su punto medio.

"Explicación:

"ODCI es un paralelogramo porque:

"IB = y // DO

"IB = CI. Estos dos segmentos se identifican, por tanto CI = y // DO

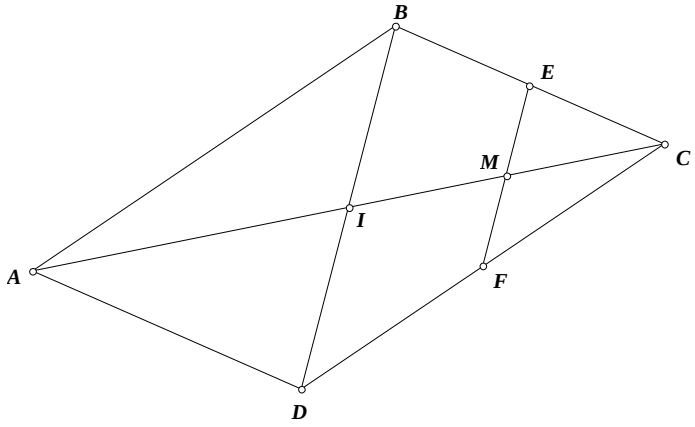
"Conclusión:

"M es el punto medio de [DI] y de [OC]." (Citado por Pioli,1998:44)

Por otro lado, las demostraciones están ligadas al *razonamiento*, el cual produce razones pero, a diferencia de las explicaciones, estas razones tienen un papel que es el de "… *'comunicar' su fuerza de argumento a las afirmaciones que se deben justificar*" (Duval, 1999b:11). En otras palabras, el razonamiento busca modificar el valor epistémico de un enunciado-objetivo (la afirmación que se justifica) y determinar su valor de verdad bajo ciertas condiciones de organización.

Como ejemplo consideremos el siguiente problema, que fue planteado en el mismo estudio que el del problema expuesto en la página anterior aunque algunas semanas más tarde:

"*Sea ABCD un paralelogramo. Sea I el punto de intersección de las diagonales, sea E el punto medio de CB y F el de CD. La recta AC y EF se encuentran en M. Mostrar que M es el punto medio de EF*"



La respuesta del mismo alumno es:

"Consideremos el triángulo BDC.

"Se sabe que E es el punto medio de (BC), y que F es el de (DC). Usando el teorema de los puntos medios: la recta que pasa por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercero, entonces (EF) // (DB).

"MC es la mediana de BDC que pasa por el vértice C.

> "La mediana AC intersecta (EF) y ya que (EF) es paralelo a (BD) y AC intersecta (BD) en su punto medio, hace los mismo con (EF), el punto medio es por tanto M."

Antes de continuar un comentario. Duval menciona que cuando habla de una evolución en las elaboraciones de los alumnos, como son los dos ejemplos del mismo alumno recién presentados, toma en cuenta básicamente dos criterios: la presencia de manera explícita de las características de un razonamiento deductivo y la modificación profunda de la actitud a lo largo de la búsqueda de las soluciones.

Entonces, mientras que la demostración es un razonamiento **válido**, la argumentación no tiene esos vínculos de validez, sino de **pertinencia**, es decir, la demostración busca la validez de un enunciado y la argumentación su pertinencia. Por un lado la demostración, a través de la Lógica, busca determinar el valor de verdad de una afirmación, la argumentación, utilizando una "lógica" coherente, busca la credibilidad y el convencimiento. Entonces en el primer caso la conclusión obtenida se impone y su valor epistémico está ligado al estatuto teórico (el valor de verdad), mientras que en el segundo dicha imposición no es obligatoria y su valor epistémico se liga al contenido (aspectos semánticos).

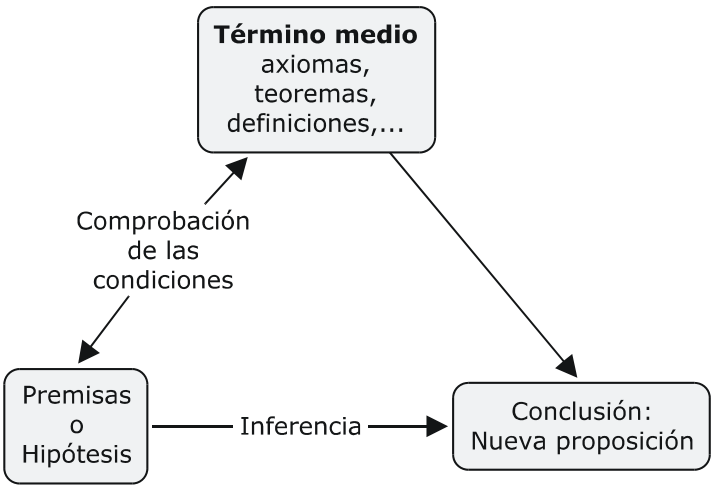
Hay que aclarar que la relación "lógica" entre proposiciones queda indicada por tres tipos de conectivos, los cuales son utilizados casi exclusivamente, según el tipo, en demostraciones (razonamientos deductivos) o en argumentaciones:

- Los *conectivos combinatorios* que integran proposiciones sin basarse en el contenido de éstas, sino en sus valores de verdad posibles. Por ejemplo: *y*, *o*, *si…entonces…*
- Los *conectivos argumentativos* que relacionan dos proposiciones **sin** integrarlas, pues la relación establecida se basa en las 'orientaciones' que existen hacia el enunciado-objetivo con base en el contenido de cada una de las proposiciones involucradas. Por ejemplo: *también*, *pero*, *sin embargo*, *aunque*.
- Los *conectivos organizativos* que indican el estatuto de una proposición en relación a otras. Sin embargo, la relación del estatuto de las proposiciones se puede hacer sin recurrir a estos conectivos.

Es interesante ver que Duval analiza el comportamiento demostrativo de alumnos, algunos de 13 y 14 años, y distingue dos tipos de pasos que marcan el funcionamiento de un proceso de razonamiento:

- La *inferencia*, el paso de proposiciones dadas como premisas o como hipótesis a un proposición dada como conclusión, con base en reglas.
- El *encadenamiento*, que es la transición que lleva de un paso de razonamiento al siguiente.

El pasaje de una inferencia (o razonamiento deductivo), como regla explícita, queda como una estructura ternaria (Duval, 1999b):



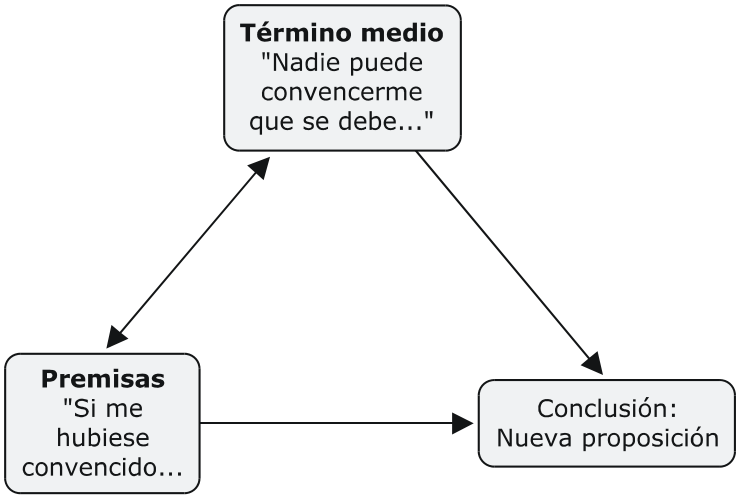
Lo que ocurre es que las condiciones de las premisas o hipótesis son comprobadas con el término medio y, una vez hecha una "sobreposición" o "sustitución" para el caso particular del problema en cuestión, se realiza la inferencia con los datos proporcionados por las premisas o hipótesis, pero tomando en cuenta la implicación existente en el término medio.

En este caso, las tres proposiciones involucradas (las premisas o hipótesis, el término medio y la conclusión) tienen un *estatuto operatorio* bien definido, el cual cambia a medida que se produce el *encadenamiento* entre las proposiciones generando una cadena de inferencias. Por ejemplo, el estatuto operatorio de lo que era una conclusión en una inferencia, cambia en la siguiente inferencia cuando se convierte en una premisa; o bien, varias inferencias más adelante, puede cambiar a ser el término medio.

Similarmente, Duval propone una estructura ternaria para la argumentación. Para ejemplificarla se presenta a continuación la misma cita que hace el autor del diálogo de J.P. Sartre titulado *Las manos sucias* (cuadro V, escena V):

> "JESSICA – ¡Hugo! Tú hablas contra tu corazón. Te observaba mientras discutías con Hoerderer:
>
> "**0. te ha convencido.**
>
> "HUGO –
>
> "**1.** No me ha convencido.
>
> "**2.** Nadie puede convencerme del hecho (se debe mentir a los compañeros).
>
> "**3a.** Pero si me hubiera convencido
>
> "**3b.** sería un motivo más para eliminarlo
>
> "**4. porque** *esto probaría que* convencería a otros." (Citado por Duval,1999:17-18)

La estructura propuesta es:



Y al respecto añade Duval (1999:18): "La relación entre premisa y término medio se basa en una doble oposición de cantidad (él/ninguno) y de modalidad (hecho contingente/imposibilidad) entre los términos de una premisa y los del término medio. La hipótesis contrafactual que se toma como premisa contradice al término medio e implica su rechazo."

Sin embargo, aquí no existe el mismo tipo de relaciones y, de hecho, los tres elementos no tienen un estatuto operatorio bien definido, pues la relaciones que existen se dan con base en su contenido semántico. Además, tampoco existe un *encadenamiento* en sí, pues los argumentos que se presentan, al no existir dicho cambio en los estatutos operatorios de las proposiciones, se acumulan haciendo uso de conectivos (principalmente *argumentativos*) para reforzarse o para oponerse entre sí.

Básicamente Duval proporciona tres diferencias que separan el funcionamiento de un pasaje de deducción para la inferencia y la argumentación:

1. Las relaciones entre las premisas y el término medio están basados, en el caso de la inferencia, en proposiciones, por lo que sólo basta hacer la "sustitución" en el término medio para verificar; en el caso de la argumentación las relaciones se basan en el contenido de las proposiciones, teniéndose que interpretar semánticamente las relaciones (de oposición, sinonimia o inclusión) existente entre los términos de ambas.
2. Las relaciones entre las conclusiones y el término medio para el caso de la inferencia es la aplicación de una implicación, es decir, es la consecuencia del término medio con base en los términos existentes en las premisas; en el caso de la argumentación la conclusión puede afirmar lo mismo o lo contrario que el término medio, dependiendo si se acepta o se rechaza.
3. Finalmente, la autoridad del término medio se basa, en el caso de la inferencia, en el estatuto teórico que debió de haberse fijado previamente y que no se halla en discusión; para la argumentación tal autoridad varía de un individuo a otro, en el mismo individuo en diferentes momentos, pues carece de estatuto teórico fijado previamente, ya que su valor epistémico está ligado con el contenido de las proposiciones.

Esto hace que un pasaje de deducción para el caso de la argumentación sea una fuente de conflictos sobre el valor epistémico de las proposiciones que se están usando para justificar y la conclusión no se imponga necesariamente, como ya se mencionó, cosa que no ocurre con el caso de la inferencia. Este pasaje de deducción argumentativo, digámoslo así, consigue adeptos y los convence, pero no valida la afirmación.

Por esta razón Duval considera fuera de lugar hablar de que la argumentación proporciona alguna validez o no, sino que más bien le deja su pertinencia al papel de cambiar el valor epistémico de su enunciado-objetivo (Pluvinage, 1996; Duval, 1999b).

Para determinar si realmente existe una ruptura o una continuidad cognitiva entre la argumentación y la demostración, Duval distingue dos tipos de argumentaciones:

- las *argumentaciones retóricas*, que son conducidas para convencer al interlocutor o a sí mismo; y
- las *argumentaciones heurísticas*, que se desarrollan en las fases de investigación al interior de un campo particular de conocimientos.

Básicamente la diferencia entre ambas es que, mientras las primeras necesitan la capacidad de comprender o producir relaciones de justificación entre proposiciones de naturaleza semántica, las segundas comprenden o producen relaciones de naturaleza deductiva. En palabras de Duval (1999b:30):

> "La argumentación heurística presupone la comprensión del funcionamiento de un razonamiento válido y de lo que significa una demostración."

La argumentación heurística se encuentra más cercana a la demostración que la retórica, mas no lo es, porque "una argumentación heurística debe implicar algunos 'sub-programas' de razonamiento válido, ¡aunque no se sepa aún como ligarlos para llegar a un árbol deductivo completo que corresponda a la demostración!" (Duval, 1999b:29-30).

La conclusión de Duval es:

> "*Pasar de la argumentación a un razonamiento válido implica un descentramiento específico que no se favorece por la discusión o por la interiorización de una discusión*. (…) El desarrollo de la argumentación incluso en sus formas más elaboradas no abre una vía de acceso a la demostración. Un aprendizaje específico e independiente se hace necesario en lo que respecta al razonamiento deductivo. (…) Esto no significa que la argumentación no tenga algún lugar en la enseñanza de las matemáticas. Por el contrario, debe ser tratada de la misma forma, precisamente para desarrollar las capacidades frente a la argumentación misma. (…) Este problema no interesa sólo al maestro de matemáticas, sino también al de lenguaje." (Duval, 1999b:44-45)

Basándose en su trabajo, Pluvinage (1996) afirma que, por un lado, no hay que confundir en las situaciones didácticas la validez de un resultado con la validez de un proceso; y por otro, que "la argumentación es un proceso retórico más complejo que la

demostración. Sería un absurdo introducir lo más sencillo a partir de lo más complejo" (p.90).

Entonces, según Duval, este paso de la argumentación a la demostración está obstaculizado por una ruptura cognitiva que requiere un aprendizaje específico. El investigador francés sostiene que los alumnos deben llevar a cabo actividades que les permitan usar y percibir el estatuto operatorio de las proposiciones que utilizan y no sólo trabajar en función del contenido. Este paso es el foso, un punto de ruptura, y para ello se necesita que el alumno también pueda articular lingüísticamente utilizando un lenguaje muy específico, como es el de la Lógica, y no únicamente con el lenguaje natural.

4.3. Intuición y demostración

En varios de sus trabajos Efraim Fischbein (1983, 1990, 1998) afirmó que en la Matemática, y en la ciencia en general, existen dos tipos de conocimientos, o cogniciones, aquellos que son *autoevidentes* y los que están basados en una serie de pasos y que proporcionan una prueba indirecta. A los primeros se le denominan *intuitivos*; a los segundos, *lógicos* o *lógicamente basados*.

Uno de los ejemplos que proporciona son los siguientes problemas (Fischbein, 1998):

A) "Un litro de jugo cuesta 5 pesos. ¿Cuánto costarán 3 litros de jugo? ¿Cómo llegas a la respuesta?"

B) "Un litro de jugo cuesta 5 pesos. ¿Cuánto costará 0.75 litros de jugo? ¿Cómo llegas a la respuesta?"

Este autor afirma que el primer problema se resuelve *intuitivamente* (una multiplicación: 5×3), mientras que el segundo necesita de un esfuerzo *lógico* para obtener la respuesta de una manera indirecta (algunas personas hacen una división: $5\div0.75$).

Además considera que el término "intuición" (Fischbein, 1983) resulta muy ambiguo y muy abierto, incluso cuando es utilizado en investigaciones psicológicas por considerarlo un término primitivo, indefinible y autoevidente. De hecho, el término "intuición" se maneja comúnmente como sinónimo de "sentido común", pero cuando se toma en el sentido de la "aceptación intuitiva" de algo.

Para Fischbein la intuición es «*traducible en una acción significativa desde el punto de vista del comportamiento*» (citado por D'Amore, 1999:331). Esto quiere decir que la intuición de un concepto lleva al individuo a asociarla con una acción. Uno de los ejemplos que da el mismo Fischbein es la operación de la división, que intuitivamente lleva al estudiante a subdividir un conjunto (continuo, como un segmento, o discreto, como una colección) en subconjuntos.

Fischbein considera de manera importante la intuición en el pensamiento matemático del individuo y propone su hipótesis:

> "Nuestra hipótesis es que las estructuras intuitivas son componentes esenciales de cada forma de comprensión activa y del pensamiento productivo" (Fischbein, 1983:3).

Incluyendo, obviamente, en ese pensamiento productivo a la producción de demostraciones matemáticas, y en la comprensión activa el aprendizaje de las mismas.

De hecho, Fischbein considera que en todo nivel de razonamiento matemático se deben tomar en cuenta tres aspectos básicos:

- *El aspecto formal*, expresado principalmente a través de la estructura lógico-deductiva de la Matemática (axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones, etcétera).
- *El aspecto algorítmico*, o *procedural*, que atañe a los procedimientos, es decir, es el representado por los procedimientos de transformación y solución.
- *El aspecto intuitivo*, que se refiere al grado de aceptación subjetiva de los conceptos o afirmaciones matemáticas como una cosa evidente o cierta.

Por ésto resulta importante marcar cuáles son las características de este conocimiento intuitivo que, de manera constante, se encuentra presente a lo largo (y ancho) del conocimiento matemático, y en general, del conocimiento científico que el alumno va adquiriendo, ha adquirido y sigue adquiriendo durante su vida.

Las características de un conocimiento intuitivo son (Fischbein, 1990, 1998):

- *Autoevidencia*. Esta es la característica básica del conocimiento intuitivo, pues es el rasgo que le permite al individuo aceptar este conocimiento sin una necesidad extra de validación. Sin embargo, ésto último resulta un obstáculo para el aprendizaje, pues si hay una afirmación (teorema) que resulta autoevidente entonces no se ve la necesidad de demostrarlo, y cuando no resulta autoevidente tal afirmación (teorema) es, frecuentemente, olvidado.
- *Coerción*. Las intuiciones se imponen como un conocimiento, con carácter de verdad, "obligatorio". En este sentido, el conocimiento intuitivo que se posee no es desplazado automáticamente por un conocimiento que le resulte contrario. Por tanto, las intuiciones tienen un peso fundamental sobre nuestros métodos de razonamiento, sobre nuestras decisiones para resolver problemas e, incluso, sobre los conocimientos analíticos que se adquieren de manera racional.

  Pensando en el caso de las operaciones aritméticas, es común que los alumnos continúen creyendo durante sus cursos de bachillerato o universidad, o a veces más, que la suma "añade", la resta "quita", la multiplicación "hace grande" y la división "hace pequeño".
- *Globalidad*. Las intuiciones son representaciones globales o interpretaciones, lo cual contrasta con las verdades establecidas de manera analítica. Fischbein (1998) menciona el siguiente ejemplo:

> "Se le presenta a un niño de entre 4 y 5 años de edad dos hileras de canicas (hilera A e hilera B). Consideremos las siguientes situaciones:
>
> "a) La hilera A y la hilera B son de la misma longitud. Cuando se le pide al niño que compare el número de canicas en las dos hileras, él afirma que hay el mismo número de canicas en las dos hileras incluso si los números son diferentes.

"b) La hilera B es más larga –el niño concluirá que en la hilera B hay más canicas, incluso si en las dos hileras hay el mismo número de canicas.

"El niño no cuenta las canicas. Su respuesta está dada como una *estimación global*."

Este carácter de globalidad se presenta porque inicialmente se da una solución global a los problemas: "Hasta que una solución no pueda ser interpretada globalmente, no adquiere un carácter intuitivo" (Fischbein, 1990:56). Pensemos, como otro ejemplo, en el caso del infinito. Un *infinito potencial* puede ser comprendido, ya que se toma como un proceso ilimitado y se puede hacer una interpretación global. En contraste, un *infinito actual*, como un cantidad infinita de elementos que es dada y que tiene que ser aceptada de un solo golpe, no es tomada globalmente y por tanto tampoco intuitivamente, porque en general la mente humana no es capaz de aprehender de una mirada una cantidad infinita de elementos.

- *Certidumbre intrínseca*. Las intuiciones tienen un carácter de necesaria certidumbre intrínseca, que no requiere de soportes externos para apoyarse, pues, de hecho, tiene la experiencia del individuo.
- *Estado de la teoría*. La intuición no es particular, sino tiene un carácter de generalidad: "Una intuición es entonces una teoría sobre una cierta realidad y no una mera percepción" (Fischbein, 1990:57). Se hace una distinción entre intuición y percepción, siendo ésta última un reflejo particular de un hecho particular, mientras que aquélla tiene esa característica de búsqueda "necesaria" de la generalización de alguna propiedad a todos los objetos que están en una situación, sin embargo comúnmente se confunden los dos conceptos. Por ejemplo, según Fischbein (1990:57) un estudiante tendrá una percepción cuando al tomar un triángulo isósceles "vea" que los dos ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes entre sí. Por otro lado, cuando el estudiante sienta la necesidad intrínseca de que para cada triángulo con dos lados congruentes, los ángulos opuestos a dichos lados son congruentes entre sí, entonces tendrá una intuición, "…ésto es una aceptación intrínsecamente verdadera de una afirmación universal."

  Se puede afirmar que el conocimiento intuitivo genera conjeturas.

- *Extrapolación*. Una intuición tiende a llevarse más allá de la información dada, más allá del soporte empírico. Es interesante notar que es precisamente esta característica lo que resultó como base de la inducción matemática.

Ahora bien, este conocimiento intuitivo se estructura en modelos tácitos que sirven para interpretar alguna situación, al sustituir un concepto complejo e inalcanzable por una representación accesible, es decir, le asigna un significado único y directamente accesible a un conjunto de datos. Esta necesidad de usar los modelos, dice Fischbein (1989), es por la ineficacia natural del hombre por usar símbolos cuyas únicas restricciones son formales, por lo que producimos modelos que les confieren un sentido práctico.

El gran obstáculo didáctico que representan es que estos modelos tácitos intuitivos tienen una enorme influencia en el razonamiento matemático que es incontrolable hasta cierto punto:

> "El modelo intuitivo manipula entre bambalinas el significado, el uso, las propiedades del concepto formalmente establecido" (Fischbein, 1989:27).

Esta influencia es en todos los niveles del razonamiento matemático y su liberación no es espontánea, sino que debe iniciarse y desarrollarse sistemáticamente por medios apropiados.

Por esto es necesario que los docentes conozcan los modelos tácitos e intuitivos que poseen los alumnos, a fin de influir en ellos y mejorar las intuiciones. De otra manera continuarán perturbando el proceso de pensamiento matemático.

Las características de los modelos mentales implícitos son:

- La primera y fundamental es el hecho de que los modelos son 'entidades estructurales', pues no están aislados, sino que son interpretaciones significativas de un fenómeno o un concepto. Un modelo implica normalmente un 'grupo' de reglas, de coacciones.
- Aunque un modelo es un constructo abstracto, éstos tienen una naturaleza concreta, práctica y con referencia al comportamiento del sujeto.
- Son simples y elementales, incluso casi triviales. Precisamente por esta característica toman el papel privilegiado que tienen.
- A pesar de dicha simplicidad, tienen la capacidad de imponer limitaciones. Por ejemplo, la operación de la resta está representada por la acción de quitarle a una colección de objetos una cantidad de ellos; sin embargo, el minuendo debe ser mayor que los otros dos números, el sustraendo debe ser menor que el minuendo y la diferencia debe ser menor que el sustraendo y, claro está, que el minuendo.
- Los modelos son entidades 'autónomas', con reglas propias y no cuyos comportamientos dependen de límites externos.
- Es fundamental su carácter de 'fuerza', su capacidad de existir por largo tiempo aun cuando no correspondan al conocimiento formal adquirido. Un ejemplo muy común de este hecho es que los alumnos de educación superior siguen cometiendo los mismos errores que alumnos más jóvenes, y ésto se puede explicar porque usan los mismos modelos implícitos, a pesar de los años de asistencia a la escuela.

Es necesario, apunta Fischbein, que los alumnos tomen conciencia de estos modelos tácitos intuitivos para que, a través de la construcción de sistemas mentales eficientes de control conceptual, puedan controlar el impacto que tienen en sus procesos de razonamiento.

Por otro lado, Fischbein considera básicamente dos categorías de intuiciones:

- *Intuiciones anticipatorias*, que están relacionadas con ése momento de "iluminación" que experimenta el individuo cuando intuye haber hallado la respuesta. Están caracterizadas por aparecer durante un esfuerzo resolutor, tienen

un carácter global y producen conjeturas que están asociadas fuertemente a un sentimiento de certeza.

Por ejemplo, para resolver un problema se pasa por algunas etapas:

comprender y distinguir claramente qué es lo dado y qué es lo requerido en el problema;

se movilizan varias asociaciones e informaciones previamente adquiridas, ya sea de manera consciente o no. En esta etapa se incluye un primer paso de ensayo de estrategias, uso de esquemas, donde el individuo duda y rechaza soluciones inadecuadas; un segundo paso en el que el individuo se toma un descanso; y un tercer paso en el que aparece una sensación "súbita" de tener la solución. Es en este último paso en el que aparece la intuición anticipatoria, la sensación de poseer una solución global con la certeza de que es correcta. Ejemplos al respecto podemos citar el de Poincaré en una nota autobiográfica:

> "Una mañana caminando por el campo, la idea me llegó justo con las mismas características de brevedad, aparición súbita e inmediata certeza de que las transformaciones aritméticas de las formas indefinidas ternarias indeterminadas eran idénticas a aquellas de la geometría no-euclidiana." (Citado por Fischbein, 1998)

O bien la sensación que percibió Andrew Wiles cuando, a punto de abandonar la demostración del *último teorema de Fermat*, descubrió cómo podía arreglar el error que contenía la demostración que había propuesto:

> "«Estaba sentado frente a mi escritorio un lunes por la mañana, el 19 de septiembre, examinando el método de Kolyvagin-Flach. (…) De repente, de una forma inesperada, tuve una revelación increíble. Me di cuenta de que, aunque el método no funcionaba perfectamente, era todo lo que necesitaba para desarrollar mi trabajo original con la teoría de Iwasawa. (…) Fue tan indescriptiblemente bello; era tan simple y elegante. No podía entender cómo lo había pasado por alto y lo estuve contemplando incrédulo durante veinte minutos. Aquel día pasé por el departamento y volví a mi despacho para ver si la nueva idea aún estaba allí. Y aún estaba»" (citado por Singh,1998:263-264).

Cuando se llega a un final bien estructurado, entonces se tiene la solución del problema.

Estas intuiciones pueden ser aprovechadas durante el proceso de aprendizaje o del de resolución de problemas sólo sin son educadas.

- *Intuiciones afirmatorias*, se refieren a las afirmaciones, enunciados, representaciones o soluciones que, desde el punto de vista subjetivo, aparecen como aceptables, autoevidentes y necesarias global e intrínsecamente. Por ejemplo, el término "punto" tiene un significado intuitivo aparente porque se le asocia automáticamente una cierta representación: una manchita; aunque, sin embargo, el concepto matemático en sí no tiene un significado intuitivo.

  Las intuiciones afirmatorias pueden ser *primarias* o *secundarias*:

Las *intuiciones afirmatorias primarias* se desarrollan de manera natural como efecto de la experiencia personal del individuo, así como a través de sus interacciones con su entorno natural y social. Algunas de las que desarrollamos son de tipos espaciales, temporales, físicas, numéricas y relativas al infinito.

Por ejemplo, si se plantea la situación de dejar caer simultánea y libremente desde la misma altura dos objetos de apariencia externa idéntica pero de pesos diferentes existe aún la creencia, a pesar de los trabajos de Galileo, de que el objeto más pesado llegará primero al piso. Esta es una creencia intuitiva, aunque incorrecta.

2. Las *intuiciones afirmatorias secundarias* constituyen creencias cognitivas que el individuo desarrolla a través de un entrenamiento sistemático y prolongado, generalmente en un contexto educativo sistemático. Además, hay que advertir la necesidad de distinguir entre información e intuición.

   Fischbein (1998:44) ejemplifica: "un físico considera obvio que un cuerpo mantiene su movimiento en línea recta con una velocidad constante si no hay fuerza alguna que intervenga (…). Esta propiedad es llamada inercia y contradice la creencia ingenua de que un cuerpo se mantiene en movimiento sólo si se le aplica una fuerza." Obviamente, este sentido de intuición varía de una persona a otra, pues no se encuentra presente en un individuo (un estudiante por ejemplo) que acaba de recibir información sobre la inercia, sino que tiene que pasar un tiempo de trabajo para que dicha información se convierta en una creencia o en una intuición aceptada como auto-evidente. Posiblemente la ejercitación de las fórmulas algebraicas para la simplificación, factorización, etcétera, de expresiones busca crear estas intuiciones en los alumnos de secundaria y bachillerato para sus cursos posteriores de Matemática, como los de Geometría Analítica o Cálculo.

Hace la acotación de que la distinción entre estos dos tipos de intuiciones afirmatorias no es general, pues depende del desarrollo de cada individuo. Básicamente la diferencia está en el medio usado para adquirirlas: de manera natural (las *primarias*) o a través de un entrenamiento sistemático en condiciones instruccionales adecuadas (las *secundarias*).

Ahora bien, las cogniciones intuitivas son confrontadas con el conocimiento científico o matemático en situaciones didácticas, siendo que en ocasiones coinciden y en otras no. Fischbein (1998) identifica cuatro de estas situaciones y sus implicaciones didácticas:

- Cuando los enunciados matemáticos son aceptados sin prueba, basados en su evidencia intuitiva. En este caso se pierde el sentido del por qué de la demostración para los alumnos, a pesar de que, por el carácter deductivo de la Matemática y su estructura axiomática, la evidencia intuitiva no elimina la necesidad de una prueba.

  Un ejemplo muy frecuente es el hecho de que los estudiantes no le encuentran el sentido al énfasis puesto en la mención de las propiedades de los números reales, como la conmutatividad y la asociatividad. O también cuando se le pide al

estudiante demostrar en un triángulo isósceles que los dos ángulos adyacentes a los lados congruentes y al tercer lado son congruentes entre sí; es evidente empíricamente el hecho que se pide verificar y, por tanto, carece de sentido realizar tal verificación.

- Cuando la evidencia intuitiva entra en conflicto con el status formal entonces habrá que hacer consciente al alumno de dicho conflicto, y hacerle entender que en la Matemática lo que decide es el status formal. Si se ignora dicho conflicto, que se presenta como una reacción intuitiva errónea, entonces la intuición original permanece, el conflicto permanece y, a la larga, se olvida la verdad matemática formal.

  Un ejemplo muy común es el proceder de los alumnos ante la simplificación de expresiones del tipo $\frac{(x-2)^2}{x^2-4}$, para las cuales utilizan las fórmulas incorrectas $(a+b)^2=a^2+b^2$ y $(a-b)^2=a^2-b^2$, pues *intuitivamente* resulta más razonable distribuir el exponente sobre la suma (como en el caso de la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma) a tomar en cuenta la fórmula correcta donde aparece el término $2ab$ "surgido de la nada". De hecho, Fischbein (1998:14-15) menciona los resultados de un investigación donde un tercio de un grupo de estudiantes utilizaron las fórmulas erróneas para simplificar la expresión que está al inicio del párrafo, respondiendo $\frac{(x-2)^2}{x^2-4}=\frac{x^2-4}{x^2-4}=1$, pero que por separado escribieron las fórmulas correctas. ¿Qué ocurrió?: "El conflicto existía de manera latente en la mente de los estudiantes, *pero la solución intuitiva se mantuvo más fuerte*".

- Cuando se presentan enunciados matemáticos sin una relación simple con una representación intuitiva no existe conflicto alguno, pero ante la ausencia de dicha relación intuitiva hace que los conceptos matemáticos, el conocimiento matemático, sea de difícil interpretación o malamente recordado. En estos casos el alumno debe acostumbrarse a la idea de que la Matemática es un sistema de conocimiento abstracto, formal y deductivo. Existen muchos ejemplos de estas situaciones, entre los cuales se pueden mencionar la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, los símbolos a^0 y $a^{\sqrt{n}}$, las operaciones $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{7}\right)$ y 0.17×0.15, el número imaginario i, y un largo etcétera.

- Cuando tanto la parte intuitiva como la parte procedural aparecen difíciles para el estudiante, ambas partes deben ser analizadas y clarificadas en el aula, y deben ser atendidos a través de ejercicios adecuados.

  Fischbein (1998:20-21) presenta el siguiente ejemplo considerando la resta:

$$\begin{array}{r} 1702 \\ -\ 1368 \\ \hline \end{array}$$

> "De acuerdo a la regla [la de sustraer cada dígito del segundo número de cada dígito correspondiente del primero número], se empieza restando de la derecha. Primero se tiene que restar 8 de 2.

> *Intuitivamente esto no funciona*. Se ha encontrado que, algunas veces, los niños invierten la operación (8–2) y escriben 6. El primero paso es contra-intuitivo. Lo que se tiene que hacer es pedir prestado del siguiente dígito a la izquierda pero esto tampoco es posible intuitivamente. El siguiente dígito es 0. Así que usted tiene que pedir prestado de nuevo del siguiente dígito a la izquierda que es 7. Ahora funciona, pero mientras tanto el estudiante ha, posiblemente, olvidado lo que estaba haciendo. A fin de no perderse, el estudiante tiene que comprender el principio del valor posicional de los dígitos, el cual está lejos de ser simple. Expresa una convención formal –el valor expresado por un dígito depende de su posición en el número. La combinación anterior de dificultades formales y procedimentales explica por qué la operación de sustracción parece ser tan difícil para muchos niños."

En todo momento, "*generalmente hablando, para la enseñanza de las matemáticas, es muy importante que el profesor entienda las interacciones entre los aspectos intuitivos, formal y procedimental en los procesos de comprensión, recuerdo y solución de problemas.*" (Fischbein, 1998:22)

Ahora, para el alumno resulta difícil aceptar algunos de los enunciados que se proponen en el conocimiento matemático. Es cuando se produce una comprensión interna, producida por una aceptación *intuitiva* del conocimiento, cuando se acepta el saber sin importar el nivel de pensamiento matemático, aun en el de la construcción axiomática.

La aceptación intuitiva, dice Fischbein, es parecido a la 'fe'[18] y se refiere principalmente al grado de aceptación directa y subjetiva de la relación correspondiente en cuanto a lo intrínsecamente necesario.

Esta aceptación está basa en convicciones, las cuales pueden ser *autoritarias*, por ejemplo si el profesor o un libro lo dice; *formales*, cuando se basan en una prueba formal; o *intuitivas*, cuando se basan en la evidencia (Fischbein, 1990).

En cuanto a la demostración, Fischbein la considera, al igual que la mayoría de los autores que escriben sobre este tema, como el método de validación por excelencia de la Matemática y, de hecho, una característica de ésta. Sin embargo, por sus reglas lógicas y deductivas, la considera fuera del flujo fundamental del comportamiento, pues a pesar de que un adolescente sería capaz de llegar al nivel lógico de razonamiento, ésto no sucede pues el método que ha utilizado durante su vida para validar su conocimiento está adaptado a los conocimientos empíricos.

Considera que "la demostración formal y la interpretación intuitiva son perfectamente congruentes" (Fischbein,1983:22), no obstante que no sean simétricos en el campo de la actividad: no tienen el mismo peso en nuestra vida práctica. Así pues, el pensamiento analítico, el basado en la lógica, tiene como característica su claridad, pero en la práctica carece de algo esencial: su inmediatez, la eficiencia directa. En situaciones prácticas se

[18] Es importante mencionar que el mismo Fischbein, aunque utiliza este término, hace la aclaración de que no tiene nada que ver con el aspecto religioso.

necesitan validaciones globales y rápidas. A pesar de ello, es posible que el concepto de demostración pueda ser usado en el aprendizaje de la Matemática:

> "El concepto de demostración formal, no inductiva, no intuitiva, no empírica, puede convertirse en un instrumento eficaz para el proceso de razonamiento si, y sólo si, adquiere ella misma las cualidades pedidas al comportamiento empírico de adaptación" (Fischbein, 1983:20).

De hecho, las afirmaciones matemáticas serán aceptadas por el alumno (esperando que no las olvide) cuando se dé la aceptación intuitiva de las mismas. De igual manera, las demostraciones de dichas afirmaciones (teoremas) serán aceptadas cuando la aceptación intuitiva ocurra. Existen tres niveles de aceptación intuitiva de la demostración:

1. Un primer nivel cuando se acepta el hecho expresado por la misma afirmación.
2. Un segundo nivel cuando la aceptación se refiere a la estructura de la demostración.
3. Un tercer nivel cuando la aceptación se refiere al hecho de entender la validez universal de la afirmación como garantizada y planteada por la validez de la demostración. Ésto se puede ver cuando un alumno acepta el enunciado y la demostración, pero aún así quiere verificar casos particulares.

Sin embargo, si las aserciones matemáticas (y científicas) son anti-intuitivas ocurre:

- que la intuición primaria es muy fuerte y la verdad matemática no la puede eliminar;
- que se desarrolle una intuición secundaria por medio del aprendizaje paralelamente a la intuición primaria, pero ambas diferentes;
- que la intuición secundaria coexista con la primaria por un largo tiempo, dado que para que se transforme una cognición formal en una intuitiva toma tiempo y mientras tanto la intuición primaria permanece.

Pero es necesario que el docente esté consciente de la existencia y del papel que juegan las intuiciones sobre el razonamiento matemático, incluyendo al momento de la producción de conjeturas y de la aceptación de teoremas y demostraciones. Es necesario que este conocimiento le permita al docente influir en los modelos tácitos intuitivos del alumno para mejorar sus intuiciones, ya que de otra manera las influencias continuarán y el paso del alumno hacia el conocimiento analítico resultará más difícil.

Los pensamientos analítico e intuitivo son aspectos complementarios del razonamiento humano, interactúan entre sí y se influencian mutuamente. No son independientes entre sí y mientras que unos se presentan de manera natural y son autoevidentes, otros ya se han convertido en una exigencia social a través de las instituciones escolarizadas.

Dice Alessandra Mariotti (1998:2-3) refiriéndose a Fischbein:

> "Es necesario reconocer la unidad entre enunciado, prueba y teoría. (…) Para poder ser usado productivamente al razonar un teorema debe tener

> cierto status de intuición, pero ello sólo puede ocurrir si la unidad —la fusión entre el enunciado y la prueba, de momento separados artificialmente—, es restaurada: el enunciado y la prueba deben condensarse en conocimiento intuitivo (Fischbein, 1983). (…) El proceso de análisis que lleva a la prueba debe ser recompuesto en una sola pieza para obtener la inmediatez que hace a aquella unidad productiva."

4.4. Unidad cognitiva de teoremas

De manera tradicional, se acostumbra en las clases de Matemática proporcionar afirmaciones a los alumnos y luego pedirles, tras algunos ejemplos, que hagan una demostración. En este proceso no se solicita que los alumnos construyan conjeturas o elaboren el enunciado que está siendo tomado en cuenta, sino únicamente que reconstruyan el proceso que, previamente, alguien ha realizado. Desafortunadamente, especialmente para el alumno, dicho proceso fue realizado por un individuo (generalmente un matemático) cuyo manejo del conocimiento y de sus habilidades para generar razonamientos deductivos ya han sido desarrolladas, además de que para el enunciado en particular que se está "demostrando" tuvo un conocimiento y una interacción previa, además de que es muy probable que haya asociado a dicha demostración significados surgidos de la interacción teórica entre las hipótesis y la tesis. Esta situación acarrea innumerables conflictos para el alumno y genera obstáculos para su aprendizaje, dado que estos recursos no le son igualmente accesibles.

En parte las dificultades que enfrentan los alumnos se relacionan con el hecho de que éstos deben reconstruir la complejidad cognitiva de un proceso en el cual se enlazan funcionalmente actos de pensamiento de diversas naturalezas que los llevan a actividades parciales que son difíciles de *re-unir*[19] en una sola.

Ante esta situación un grupo de investigadores en Didáctica de la Matemática que incluyen entre otros a Paolo Boero, Maria Alessandra Mariotti y Rossella Garuti[20] han explorado la producción de conjeturas y de demostraciones por parte de alumnos en contextos aritméticos y geométricos. Por medio de estos trabajos han obtenido evidencia experimental de que llevando a cabo actividades apropiadas en contextos adecuados, los estudiantes pueden acercarse de un modo constructivo a la formulación de la demostración.

Boero y Garuti (1994) realizaron un análisis histórico y epistemológico a fin de identificar características distintivas de los teoremas y sus pruebas, en el ámbito geométrico y centrándose en organizaciones teóricas axiomático-deductivas de

[19] El término *re-unir* se utiliza aquí para hacer énfasis en el hecho de que los alumnos tienen que reconstruir un proceso (al que generalmente no han tenido acceso anteriormente) hecho previamente por otro individuo (al cual por lo general no conocen), buscando sus elementos y **volviendo a unirlos** para obtener un producto reconstruido: una demostración.

[20] También se pueden mencionar a Federica Olivero, Maria G. Bartolini Bussi, Giampaolo Chiappini, A. Sibilla, Enrica Lemut y Franca Ferri.

conocimiento geométrico a los cuales denominan *geometría racional*,[21] a fin de que sirvan como punto de referencia para los análisis posteriores de los resultados con alumnos. El ejemplo que proporcionan, y que de hecho resulta ser clásico en la enseñanza de la Geometría, es el expuesto por Euclides en *Los Elementos*, llegando a la conclusión de que los enunciados que presenta tienen como características ser:

- *generales*, ya que se refieren a colecciones de objetos;
- *abstractos*, porque se refieren a objetos geométricos, sin tener relación alguna con referencia a objetos concretos;
- *condicionales*, pues aparecen formulados de la manera *"en la hipótesis de que… es verdad que…"*.

Asimismo, los enunciados geométricos, pueden expresarse de dos maneras: la *procedural*, que es cuando indican la construcción de algún objeto, como por ejemplo la proposición 20 del libro IX de *Los Elementos* de Euclides: "Los números primos son más que cualquier cantidad señalada de números primos"; o la *relacional*, que es cuando se indican las relaciones o propiedades que dependen de las hipótesis formuladas o a ser probadas, como por ejemplo la proposición 22 del libro IX de *Los Elementos* de Euclides: "Si tantos números impares como se deseen son sumados juntos, y su cantidad es par, el total será par" (citado por Boero et al.,1995:130).

En ambos casos observaron, después del análisis histórico-epistemológico, muchos ejemplos que muestran una continuidad entre la producción de enunciados y la construcción de su demostración. Paolo Boero (1999) expone seis fases de actividades de producción de teoremas y construcción de conocimiento matemático por parte de un matemático profesional:

I. Producción de una conjetura.

II. Formulación del enunciado correspondiente de acuerdo a convenciones culturales compartidas.

III. Exploración del contenido (y límites de validez) de la conjetura; elaboraciones heurísticas, semánticas e incluso formales de la relación entre la hipótesis y la tesis; identificación de argumentos apropiados para la validación.

IV. Selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva.

V. Organización de la cadena de argumentos en la forma de una prueba aceptable según los estándares matemáticos vigentes.

VI. Aproximación a la prueba formal.

Es importante mencionar que estas fases no están interconectadas de manera lineal, pues si, por ejemplo, durante el proceso el matemático detecta un error en sus argumentaciones al momento de organizarlos en una cadena, muy posiblemente tendrá que realizar una nueva exploración, "retrocediendo" a una de las primeras fases. Un

[21] Mencionan que en Italia, en la educación secundaria, se usa el término *geometria razionale* para referirse al conocimiento geométrico estructurado de la manera ya descrita.

ejemplo muy ilustrativo es la descripción de Andrew Wiles sobre su experiencia de *hacer* Matemática mencionada en la capítulo 2 (pág. 12) donde resaltan los meses de labor continua que preceden a los resultados formales. Otro ejemplo es que nos ofrece el matemático francés Maurice Fréchet (1958) al considerar que la Matemática tiene cuatro partes (una *síntesis inductiva*, una *etapa axiomática*, una *teoría deductiva* y un *conjunto de verificaciones experimentales*) añade que "según la rama de las ciencias matemáticas en la cual uno se interese, resulta esencial una u otra de las cuatro partes" (pág. 23), haciendo así énfasis en la interrelación necesaria entre los métodos de investigación y de validación, no manteniéndose independientes unos de otros.

Al tomar en cuenta este análisis histórico y la evidencia empírica que obtuvieron a partir de sus experimentos con alumnos del nivel medio en Italia, estos autores han observado una unidad cognitiva en la construcción de las demostración la cual han denominado *Unidad Cognitiva de Teoremas* (Boero et al., 1996), que está basada precisamente en la continuidad existente entre la producción de una conjetura y la construcción posible de su prueba. Si esta unidad se rompe, como cuando se pide una tarea a los alumnos usando una frase que inicie con "demuestre que…", se pierde la continuidad y sólo se recupera cuando existe una re-apropiación del enunciado a través de un ciclo completo: *explorar*, *conjeturar*, *explorar*, *reorganizar una nueva demostración*.

Este ciclo básicamente se divide en dos fases:

I. Producción de las conjeturas.

II. Construcción de la prueba.

En ambos casos se inicia con una exploración dinámica. Para la primera fase la exploración es sobre la situación problemática, a fin de generar un espacio de posibles configuraciones y así trabajar después en la producción de la conjetura. Esta exploración dinámica tiene una relevancia fundamental, pues provee al individuo no sólo del enunciado que después validará (la conjetura), sino también de argumentos que pueden ser utilizados posteriormente. Este razonamiento argumentativo permite a los alumnos la exploración consciente de alternativas y el acercamiento progresivo al establecimiento de enunciados, así como la justificación de la plausibilidad de las conjeturas producidas.

Un ejemplo de este proceso de construcción de una demostración en la que aparecen elementos presentes en la producción de conjeturas es el que parte del siguiente problema (Boero et al., 1996:115 y 118):

> "En años pasados observamos que las sombras de dos estacas verticales en un piso horizontal son siempre paralelas. ¿Qué se puede decir del paralelismo de las sombras en el caso de una estaca vertical y una oblicua? ¿Puede ser las sombras paralelas? ¿A veces? ¿Cuándo? ¿Siempre? ¿Nunca?"

Un alumno formula una conjetura y una prueba:

> "Podrían ser paralelas si imagino ser el sol que mira y debo colocarme en tal posición para ver dos estacas paralelas. De esta manera el sol manda sus rayos paralelos para iluminar las estacas. Pero si el sol cambia su posición no verá las estacas paralelas y, por tanto, sus sombras no serán paralelas. Las

sombras pueden ser paralelas si la estaca oblicua este en el mismo plano vertical que los rayos solares.

"Prueba: Si el sol mira la estaca derecha y la estaca oblicua paralelas es como si hubiese otra estaca vertical en la base de la estaca oblicua. Si esta estaca está enfrente de la estaca oblicua su sombra cubre la sombra de la estaca oblicua. Estas sombras están en la misma línea, por tanto, las sombras de las estacas oblicua y vertical son paralelas."

A partir de las investigaciones con alumnos de 13 y 14 años de edad (Boero et al., 1996; Boero, Garuti y Mariotti, 1996), la primera fase la subdividieron a su vez en tres durante la ejecución de la investigación:

1. *Producción de conjeturas*, donde empezaron los alumnos a jugar con objetos, en equipos o solos según como escogieran; movieron objetos, se movieron ellos mismos o cerraron sus ojos, imaginando. Se llevó a cabo una exploración dinámica. Los alumnos, individualmente, escribieron sus conjeturas.
2. *Discusión de las conjeturas*, en donde, guiados por el docente, se lleva a cabo una aproximación de los estudiantes, corrigiendo las conjeturas erróneas, viendo nuevas alternativas y modificándolas o rehaciéndolas.
3. *Sistematización de los enunciados*, que se logra a través de la eliminación de metáforas y haciéndolos más precisos desde un punto de vista lingüístico.

   Por ejemplo, al plantearse el problema sobre el paralelismo de las sombras de dos estacas mencionado arriba, se obtuvieron de manera colectiva enunciados como los siguientes (Boero, Garuti y Mariotti, 1996:124):

   ⇒ "Si los rayos solares están en el plano vertical de la estaca oblicua, las sombras son paralelas. Las sombras son paralelas sólo si los rayos solares están en el plano de la estaca oblicua."

   ⇒ "Si la estaca oblicua está en un plano vertical conteniendo los rayos solares, las sombras son paralelas. Las sombras son paralelas sólo si la estaca oblicua está en un plano vertical que contenga los rayos solares."

En estos casos se utilizaron situaciones problemáticas basadas en actividades físicas (Boero y Garuti, 1994; Boero et al., 1995; Boero et al., 1996; Boero, Garuti y Mariotti, 1996), pero también existe la posibilidad de que actividades en un ambiente exploratorio como el proporcionado por Software para Geometría Dinámica [SGD], tal como hace Bettina Pedemonte (2001) en sus investigaciones utilizando *Cabri-Géomètre* en particular, pueden ser adecuadas para la aplicación de este enfoque pues las construcciones geométricas en la pantalla son un producto de operaciones concretas cuya corrección está controlada por una evaluación empírica, y aunque el control teórico no es logrado espontáneamente, puede resultar de actividades llevadas a cabo por los alumnos, lo cual es logrado en parte con la actividad controlada del *arrastre*[22] (Mariotti, 1997; Mariotti et al., 1997).

[22] El término *arrastre* (*dragging* en inglés) se refiere a la propiedad que tienen este *software* de poder mover "libremente" objetos geométricos en la pantalla de la computadora (puntos o líneas) utilizando el *ratón* o un dispositivo señalador, lo cual afecta automáticamente a toda la construcción realizada, ya que

En la fase de construcción de la prueba se lleva a cabo también una exploración dinámica que permite la búsqueda de argumentos para la construcción de la demostración. Estos argumentos están relacionados con los argumentos que llevaron a la construcción de la conjetura, pues se utilizaron éstos para apoyarse en la formulación de aquéllos en la segunda fase: sucede que si, por ejemplo, la argumentación es pobre durante la fase de la producción de las conjeturas, entonces existe una falta de argumentos para construir la demostración. Más aún, los argumentos hechos durante la producción de enunciados se usan en la justificación de la misma demostración, frecuentemente con expresiones lingüísticas similares. Sin embargo, tienen diferencias marcadas entre sí, principalmente en la función que asumen durante el proceso de pensamiento: inicialmente es un soporte para la selección y la especificación de la conjetura, y después puede ser un soporte para la implementación de una conexión lógica.

Durante la construcción de estas pruebas los alumnos llevaron a cabo heurísticas, analogías y consideraron el carácter semántico de las proposiciones consideradas, para lo cual encontraron argumentos y los "encadenaron" a fin de darle una secuencia lógica, deductiva. Sin embargo, esos mismos autores admiten que, para el caso del estudio en ámbito geométrico, los alumnos no propusieron enunciados geométricos en sentido estricto, ni tampoco pruebas formales, pero ellos le ponen más interés en el razonamiento que llevaron a cabo los alumnos, en la necesidad que sintieron por validar a través de un razonamiento deductivo las afirmaciones (conjeturas) producidas y en el acercamiento al método de trabajo de los matemáticos:

> "Pero su razonamiento deductivo comparte muchos aspectos con la construcción de una prueba matemática. Además, la actividad completa ejecutada por los estudiantes comparte muchos aspectos con el trabajo de los matemáticos cuando producen conjeturas y pruebas en algunos campos matemáticos." (Boero, Garuti y Mariotti, 1996:126)

Boero (1999), por otro lado, hace hincapié en el carácter de "falta de rigor" por parte de los alumnos al considerar que, inevitablemente, los resultados de los alumnos variarán enormemente de aquellos producidos por los matemáticos, pues mientras que los matemáticos son capaces de jugar con los argumentos y trasladarlo a un campo mental con las restricciones impuestas por las reglas estrictas de la lógica, los alumnos encuentran serias dificultades para pasar de un juego argumentativo a otro con dichas restricciones lógicas, por no decir que están aprendiendo las reglas de éste último y de que, además, tienen serios problemas incluso para argumentar.

En toda esta situación el profesor juega un papel de mediador. Existe una enorme diferencia entre el conocimiento del alumno y del profesor, principalmente en las experiencias que éste último tiene y aquél no en áreas lingüísticas (para la formulación de enunciados, incluyendo características de generalidad y condicionalidad), de significado de conceptos matemáticos, del significado asignado a la demostración en la

---

se preservan las propiedades geométricas de los objetos (paralelismo, perpendicularidad, transformaciones, etcétera) con las que fueron construidos. En el siguiente capítulo se ahondará más al respecto, particularmente en la sección 5.2 (pág. 72 y ss.).

Matemática (incluyendo modalidades y técnicas) y del uso de sistemas formales (algebraicos y geométricos) que son los instrumentos para expresar y probar teoremas.

De esta manera el profesor tiene que tomar en cuenta estas diferencias y conducir gradualmente, a través de actividades en contextos educacionales adecuados, para que la producción de conjeturas de los alumnos tenga las características necesarias.

Para poder llevar a cabo este papel de mediadores, estos investigadores proponen el uso del concepto de unidades cognitivas de los teoremas como una herramienta para predecir y analizar algunas dificultades de los alumnos, proporcionando un camino para abordar la enseñanza de la demostración.

Existe la posibilidad de investigar, desde un punto de vista holístico, esta continuidad cognitiva en los contextos educativos adecuados, aunque aparentemente contraste con la profunda diferencia existente entre el razonamiento argumentativo necesario para construir y hacer plausible una conjetura y el razonamiento deductivo para validarla rigurosamente e incluso llegar a hacer una demostración .

Sin embargo, como lo expresa Maria Alessandra Mariotti (1998), para la aproximación temprana a los teoremas y su demostración los problemas abiertos son una posibilidad y también "son particularmente valiosos aquellos problemas que requieren la producción de una conjetura. Más aún, el proceso de producción de conjeturas es determinante para introducir a los alumnos a la argumentación."

4.5. Comentarios adicionales

A lo largo de este capítulo se han desarrollado algunas ideas plasmadas a lo largo de los últimos años en el campo de la Didáctica de la Matemática enfocada en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Como se ha mencionado, el proceso de construcción de una demostración en la escuela no es algo aislado y simple, sino que intervienen factores de diversa índole como es la producción de argumentos, el manejo de los conceptos matemáticos, el papel de la intuición, la capacidad de generalización, la exploración, la observación y hasta la concepción misma de la Matemática que se tiene (tanto el profesor como el alumno). Además, hay que admitirlo, variables incluso lingüísticas y culturales que no se abordan aquí influyen. Sin embargo, no hay que pensar equivocadamente que ante la complejidad de los fenómenos que se estudian en el ámbito educativo, la revisión y los análisis realizados no valen la pena, pues esto es lo que nos permite darnos cuenta de lo necesario que es el aprendizaje de la construcción de la demostración en la matemática escolar del nivel medio al tiempo que obtenemos información que permite un trabajo docente adecuado.

Así pues, al inicio del capítulo (y desde el anterior) se mencionó el trabajo de Nicolás Balacheff, quien circunscribe a la demostración a la comunidad matemática. Es interesante observar que con esta postura parecería que sólo le deja a los integrantes de la institución de enseñantes de la Matemática (y a los mismos alumnos de casi todos los niveles educativos) la posibilidad de manejar pruebas. No obstante, como el papel, la función y el significado de la prueba y la demostración varían de una comunidad a otra

(e incluso diacrónicamente al interior de cada una de éstas), incluyendo la matemática y la escolar, creo que sería valdría la pena hacer la siguiente observación:

Desde el punto de vista de Juan D. Godino, la demostración tiene un significado particular en la institución de los enseñantes de la Matemática, con características que si bien toman como referencia aquéllas otorgadas en la institución matemática pero que no necesariamente deben coincidir completamente, por lo que quizá lo que se hace necesario no es tanto diferenciar entre *demostración* y *prueba*, sino considerar la diferencia entre las diversas instituciones y replantear un significado de la demostración (o prueba, como sinónimos) considerando las prácticas de la institución que la producen como objeto matemático, para lo cual se hace necesario considerar no sólo su significado lógico, sino también las diversas funciones que puede tener y el contexto donde se genera.

Es indudable que el aporte realizado al campo de la Educación Matemática por Balacheff en su categorización de tipos de prueba es relevante y nos permite analizar situaciones de aprendizaje y avanzar hacia la construcción de modelos para la instrucción, pero el hacer la distinción en términos del significado institucional nos permite pensar en que los alumnos construyen demostraciones o pruebas (manejando los términos como sinónimos), advirtiendo siempre que tales productos se realizan en el contexto escolar.

Así pues, con esta posibilidad es posible establecer la comparación en el proceso de producción de una demostración en las dos instituciones que nos interesan, tal como lo hacen los investigadores italianos, y así proponer un modelo de instrucción en el ambiente escolar que tome como referencia las prácticas de la institución matemática y aplique un proceso adecuado de transposición didáctica considerando aspectos como la intuición y la argumentación, entre otros.

Precisamente para Raymond Duval la argumentación podría constituirse como un obstáculo epistemológico para la generación de la demostración debido a las diferencias entre ambos discursos. Al comparar sus resultados con los propuestos por los investigadores italianos de la sección anterior se podría pensar que hay una contradicción que en realidad no existe, pues la diferencia es términos del enfoque. La continuidad cognitiva mencionada por los italianos en los procesos de construir conjeturas y la demostración correspondiente es el aspecto semántico (Pedemonte, 2001), pero no así en el aspecto estructural (Duval, 1999b) y epistemológico (Arzarello, Olivero, Robutti, Paola, 1999), ya que sus formas (estructura) y las intenciones de cada uno de tales procesos, y sus productos, son diferentes. Recordemos que la relación entre la argumentación y la demostración es compleja a pesar de la posibilidad de aprender a construir demostraciones a partir de exploraciones y conjeturas.

Nicolás Balacheff (1999), al referirse a la postura del equipo italiano encabezado por Boero y Mariotti, escribe:

> "Resumiré en una expresión sintética el lugar que yo veo posible para la argumentación en matemáticas, a tono con el sentido del concepto de la unidad cognitiva de los teoremas desarrollado por los colegas italianos: La argumentación es a la conjetura como la demostración es al teorema."

Al ser la unidad cognitiva de teoremas un constructo teórico que muestra cómo se lleva a cabo el proceso de construcción de una demostración partiendo de una situación que permite la exploración, más que de una sentencia del tipo “demuestre que...”, se puede convertir en una herramienta útil para el diseño y organización de actividades de enseñanza. En particular en el próximo capítulo se aprovechará para aplicarlo en el diseño de algunas actividades.

5. La demostración en Geometría Dinámica: Una oportunidad en la enseñanza con computadoras

There are ways to ascend from one level to the next and the teacher can help the pupil to find these ways. To be able to do this we need a theory, and practice follows from it.
Pierre Marie van Hiele
[*Structure and insight,* vii]

Computers can make the things we already do badly in schools even worse, just as they can make many things we already do well infinitely better.
F. Smith
[*Insult to intelligence,* 206]

En los capítulos anteriores se han mencionado algunos aspectos teóricos útiles para el estudio de los fenómenos asociados con el aprendizaje de la demostración, pero que también pueden aplicarse en el desarrollo y diseño de actividades tendientes a dicho aprendizaje. Estos aspectos se han conjuntado, como producto de análisis epistemológicos e históricos, en el constructo con el que se cierra el capítulo precedente, el de la *unidad cognitiva de teoremas*. En este capítulo se aprovecha este constructo teórico al aplicarlo en actividades en un contexto de la geometría escolar del nivel medio utilizando triángulos y cuadriláteros, y echando mano de propiedades de paralelismo, para el desarrollo de justificaciones que tiendan a un modelo de argumentos deductivos encadenados, es decir, un avance hacia la construcción de demostraciones formales.

Para ello se propone aprovechar también las potencialidades gráficas y de manipulación que ofrece la llamada *Geometría Dinámica*, aunque con ello se introducen en el proceso de aprendizaje dos nuevos factores muy bien identificados y de gran relevancia: el de la naturaleza de los objetos geométricos y el de la herramienta mediadora que es el *software para Geometría Dinámica*. Es por ello que primero se presentan algunas consideraciones y reflexiones al respecto, por la necesaria influencia que tienen en el proceso de aprendizaje y en las acciones que debe llevar a cabo el docente, para después exponer las actividades propuestas.

5.1. Dos aspectos de las construcciones geométricas: lo figural y lo conceptual

Algo que resulta independiente de la problemática cognitiva y las implicaciones didácticas que tiene la construcción de la demostración (y de sus significados) en la Educación Matemática, es el hecho de que las representaciones mentales de los objetos involucrados en las actividades que vienen más adelante, es decir los geométricos, no poseen las mismas características que los existentes en otras ramas de la Matemática.

Estas consideraciones resultan necesarias cuando se abordan conductas de los estudiantes que a primera vista podrían ser vinculadas con la incomprensión de conceptos o definiciones por parte de los estudiantes, pero que más bien pueden ser explicados a partir del hecho de que los objetos geométricos tienen, básicamente, dos componentes: el *figural* y el *conceptual* (Fischbein, 1993), íntimamente ligados entre sí, que hacen necesario distinguir entre *figuras* y *dibujos* (Parzysz, 1988; Laborde y Capponi, 1994; Hölzl, 1995; Goldenberg y Cuoco, 1998; Maracci, 2001a, 2001b),[23] en particular si se considera el uso de software para Geometría Dinámica, pues tal distinción es enfatizada fuertemente por este tipo programas computacionales. Estos aspectos los comentaremos a continuación.

La Geometría, a diferencia de otras ramas de la Matemática, está íntimamente ligada a las representaciones gráficas que se utilizan no sólo para ejemplificar algunas proposiciones, sino para representar dichas proposiciones y a los objetos manejados. Incluso algunos geómetras, como Félix Klein, expresaron la necesidad de utilizar dibujos o diagramas para el estudio de la Geometría, o bien, como menciona Mariotti (1995:101), "no es posible presentar un concepto geométrico sin ejemplos proporcionados, lo que significa dibujar figuras o mostrar modelos". No se deberían tomar a tales ejemplos (dibujos o modelos) como los objetos geométricos en sí, pero existe la confusión muy común de hacerlo, incluso en el contexto escolar.

Esta confusión proviene en gran medida de que los objetos geométricos, y sus combinaciones que llamamos *construcciones geométricas* o *figuras geométricas*, no sólo son objetos con propiedades conceptuales, que rigen de una manera lógica su comportamiento y sus relaciones, sino que también están íntimamente relacionados con su representación, que puede estar en un nivel de representación mental (una imagen mental) o plasmada en un medio físico (hoja de papel o pantalla de una computadora).

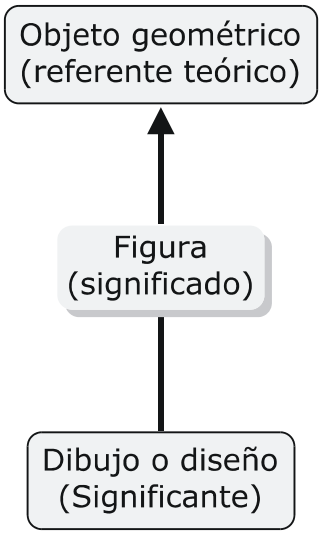
Fischbein (1993), en su Teoría de los Conceptos Figurales, establece que las figuras geométricas poseen ambos aspectos: los *conceptuales* y los *figurales*. No tienen sólo de uno u otro, sino que "conviven" los tipos de propiedades:

> "Los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entonces entidades mentales, llamadas por nosotros *conceptos figurales*, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales –como idealidad, abstracción, generalidad y perfección." (Fischbein, 1993:143)

Es importante mencionar que, ampliando lo que menciona Fischbein, comúnmente las propiedades espaciales en los alumnos incluyen también consideraciones como, por ejemplo, el tamaño de la representación gráfica (es decir, el de la mancha que representa a un punto) o la posibilidad de considerar a los objetos geométricos como objetos reales, y así "tomarlos" y manipularlos. Hay que decir que en estos casos se confunde lo que es el objeto matemático con su representación.

[23] Maurice Fréchet, desde su punto de vista matemático y ya desde la década de 1920's, hace la distinción llamándole "figura real perceptible" a los dibujos y "figura abstracta tratada en la teoría deductiva" a las figuras. Además, considera que su confusión en la enseñanza es lamentable e inadmisible.

Es por ello que conviene hacer una distinción de *dibujo*, de *figura* y de *objeto geométrico*, tal como la plantean Laborde y Capponi (1994) al relacionarlo con el diagrama utilizado en las teorías semióticas:



En este caso el *dibujo* es una representación gráfica material, tal como los trazos sobre un papel o los pixeles en una pantalla (Hölzl, 1995:118), de un *objeto geométrico*, que es su referente teórico el cual está restringido o "controlado" por las definiciones y limitantes lógicas. Un dibujo, por cierto, contiene información figural que, ocasionalmente, puede resultar innecesaria, que va desde aspectos completamente sin relación con el objeto geométrico, y sí relacionados con el aspecto general como es el caso del color, el grosor; hasta aspectos que pueden influenciar en la apreciación del dibujo como es la orientación. Ahora bien, como no se puede acceder directamente a los objetos geométricos, se les representa por medio de dibujos, a los cuales se le asignan *significados*, que son las relaciones que el individuo establece entre el objeto y su representación.

Estos significados corresponden, por un lado, a la noción de *concepto figural* de Fischbein (Laborde y Capponi, 1994:169), ya que en éste se entralazan los aspectos figurales que están relacionados con los dibujos atribuidos a una figura geométrica en particular junto con los limitantes conceptuales que proporciona el objeto geométrico desde su naturaleza teórica. Por otro lado, corresponden a las llamadas *figuras*, pues cada una de éstas son consideradas como "el representante de una clase de objetos que comparten el conjunto de propiedades geométricas con el que se construyó la figura" (Sánchez, 2003:31), además de que "la figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado a todos sus dibujos, es entonces definida como el conjunto de parejas formadas por dos términos, el primer término es el referente, el segundo es uno de los dibujos que lo representan; el segundo término es tomado del universo de todos los dibujos posibles del referente" (Laborde y Capponi, 1994:168).

Por su parte, la característica dinámica del software para Geometría Dinámica hace necesario que la diferencia entre *dibujo* y *figura* se destaque, pues en este ambiente las construcciones geométricas están construidas con base en las relaciones lógicas entre los objetos y no sólo sobre los aspectos figurales de las mismas. Goldenberg y Cuoco (1998) expresan su interés al respecto:

> "¿Por qué nos deberíamos preocupar por las taxonomías tripartitas y otras teorías de la mente? Por una cosa, los ambientes de GD están construidos con los mismos principios: El usuario especifica a la computadora las relaciones subyacentes (los objetos matemáticos), y la computadora debe preservar ese objeto mientras que deja las características superficiales (el dibujo) completamente maleables." (Pág. 355)

Sin embargo, ambos aspectos ejercen una influencia en el individuo que está supeditada, entre otras cosas, a su desarrollo cognitivo, por lo que tales influencias no están necesariamente "balanceadas" de una manera adecuada.

Además, ambos aspecto ejercen una influencia en el individuo que está supeditada al desarrollo cognitivo de éste, por lo que tal influencia no necesariamente esta "balanceada" adecuadamente. En efecto, si bien es necesario que exista una fusión entre los aspectos figurales y conceptuales para que el manejo de los objetos geométricos sea apropiado, tal situación sólo parece existir en una situación ideal y extrema (Maracci, 2001b), ya que de hecho Fischbein (1993:150) afirma: "lo que sucede es que las propiedades conceptuales y figurales permanecen bajo la influencia de los sistemas respectivos, el conceptual y el figural".

Sin embargo, según Maracci (2001a, 2001b) parece que los alumnos buscan dicha fusión de una u otra manera (incluso de una manera no consciente) al tratar de construir dibujos que les resulten *satisfactorios*, es decir, dibujos que cumplan con las siguientes condiciones:

- "Un dibujo debería representar 'correctamente' la situación geométrica descrita en el problema, esto significa que la comprensión del estudiante de una situación dada y su interpretación del dibujo producido debería ser consistente.
- "Un dibujo debe ser reconocido como suficientemente genérico (...).
- "Un dibujo debería poseer una buena gestalt, debería satisfacer las leyes fundamentales que controlan los procesos básicos de percepción." (Maracci, 2001a:481)

Mas, se puede observar, dicha satisfacción no necesariamente está relacionada con las limitantes lógicas o conceptuales de las figuras, ya que la segunda y la tercera condiciones tienen que ver más con las limitantes figurales, tal como la forma (negarse a usar triángulos rectángulos como ejemplos genéricos de los triángulos) o la orientación (utilizar diagramas con segmentos o lados de polígonos alineados obligatoriamente con los bordes de la hoja).

Las tensiones que se generan entre ambos aspectos pueden transformarse en un obstáculo durante el razonamiento geométrico, especialmente cuando se inclina en la dirección de la preeminencia de los aspectos figurales.

Es importante notar que estas dificultades deben servir como parámetro y referencia para la propuesta de actividades, tal como ocurre en las de la siguiente sección.

5.2. Micromundos con Geometría Dinámica

La *Geometría Dinámica* es un término que se refiere a la Geometría estudiada con herramientas computacionales en las que el usuario puede realizar construcciones geométricas y manipularlas con el ratón (o algún otro periférico señalador) para modificar su forma, pero sin que se pierdan las propiedades geométricas de los objetos involucrados gracias a las definiciones con las que llevó a cabo la construcción y la capacidad de cálculo y de graficación de las computadoras. El software que puede ser utilizado para realizar este tipo de estudio de la Geometría es el llamado *software para Geometría Dinámica*, de los cuales existen varios en el mercado, y lo interesante es que sus potenciales permiten crear los llamados *micromundos* en el ambiente geométrico, por lo que inicialmente se ahondará en esta noción para después revisar cada uno de sus componentes.

La idea de *micromundo* se generó en el ambiente de la Inteligencia Artificial y fue Seymourt Papert uno de los primeros que lo planteó como "un ambiente de aprendizaje interactivo basado-en-computadoras donde los prerrequisitos están incorporados al sistema y donde los estudiantes pueden convertirse en arquitectos activos, constructores de su propio aprendizaje" (Papert, 1982:144). La concepción de micromundo ha ido evolucionando[24] conforme ha pasado el tiempo. Originalmente esta noción fue ligada a la programación, principalmente con Logo, pero con la aparición de otros programas, que cubren una amplia gama de posibilidades tanto en la capacidad de interacción con el usuario como con respecto a su intencionalidad (si están concebidos para usarse en la Matemática o en la Educación Matemática, como los menciona Dreyfus [1994:206-207]), los ambientes posibles se han ido modificando y enriqueciendo.

En general, los micromundos son "dominios en los cuales los niños (y los adultos) pueden explorar y aprender simultáneamente. (...) Ambientes donde la gente puede explorar y aprender de lo que reciben de la computadora como respuesta de su exploración" (Hoyles y Noss, 2003:112-113). Viéndolo así, se podría pensar en micromundos que no funcionan en ambientes computacionales (Edwards, 1998), pero es precisamente la potencialidad de retroalimentación casi inmediata, aunada a las de representación gráfica y de manipulación para el caso de software para Geometría Dinámica, lo que permite a la computadora ser una herramienta útil para utilizarse en los micromundos. Además, como mencionan Noss y Hoyles (1996:6), esta herramienta al mediar entre el conocimiento y el individuo y al tener la posibilidad de registrar en muchos casos los movimientos que realiza el usuario (en este caso el alumno) se convierte en un medio, en una *ventana*, que "proporciona una pantalla en la cual los alumnos pueden expresar su pensamiento y simultáneamente nos ofrece la oportunidad de vislumbrar los rastros de su pensamiento".

Un micromundo tiene objetos y herramientas internas que permiten al usuario realizar operaciones sobre los objetos a su interior restringidas también por reglas internas. Además, estos ambientes, hay que decirlo, no están compuestos por un aparato, unas actividades, el ambiente, el alumno o el profesor, cada uno de éstos aislados, sino que se forma de la interacción de estos elementos dentro de un campo de conocimiento. Se

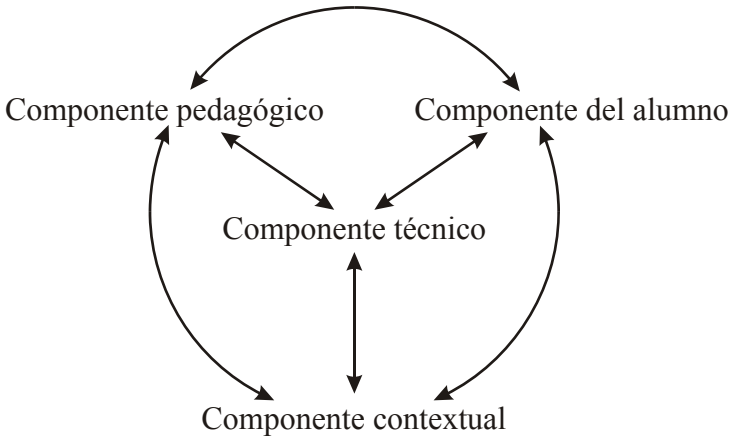
[24] Noss y Hoyles (1996), así como Edwards (1998), hacen una revisión más profunda al respecto.

considera que un micromundo tiene cuatro componentes (Hoyles y Noss, 1987) que interactúan entre sí:

- *El componente técnico* corresponde a las herramientas utilizadas, que para el caso de los ambientes computacionales es el software considerado.
- *El componente pedagógico* incluye la planeación y actividades que realiza el profesor y tiene como función "estructurar la investigación y la exploración de conceptos encarnados en el componente técnico, es enfocar la reflexión sobre aspectos particulares, sugerir métodos productivos de operaciones, indicar puntos de inicio útiles y generar vínculos con otras actividades" (pág. 588).
- *El componente contextual* se refiere al ambiente social donde se lleva a cabo el micromundo.
- *El componente del alumno* corresponde, básicamente, al sujeto que aprende, tanto desde el punto de vista cognitivo como el afectivo.

Es importante recalcar que un micromundo resulta de la interacción de cada uno de estos componentes, pues aunque a veces se piensa que la computadora como herramienta es suficiente no es así, pues "el *software* en el corazón de un micromundo modela fragmentos matemáticos pero no encarna en sí intenciones pedagógicas. Hemos sugerido en otras partes que un micromundo es mejor pensado como algo considerablemente *más* que el software" (Hoyles, Noss, 1992:31). Incluso Sutherland y Balacheff (1999) ponen como ejemplo que no es el mismo significado que se le otorga a la Geometría si se utiliza Logo a que si se utiliza Cabri-Géomètre,[25] así como no será el mismo conocimiento si se cambian las actividades, el ambiente o, incluso, a los alumnos en sí. Hoyles y Noss (1987:591) consideran que si bien los componentes de un micromundo se encuentran en relación entre sí, ponen al componente técnico en el centro de la compleja red de relaciones interactivas:

[25] *Logo* es un lenguaje de programación desarrollado por Seymour Papert y se le conoce como el "lenguaje de la tortuga" por característico cursor que aparece en la pantalla. Fue utilizado inicialmente para la enseñanza de la Geometría, pues por ejemplo el alumno escribe instrucciones para que la "tortuga" (el cursor) realice trazos en la pantalla, y actualmente se utiliza también para la enseñanza del Álgebra en los niveles básico y medio básico. *Cabri-Géomètre* es software para Geometría Dinámica y se ampliará su descripción en la siguiente sección. El lector debe notar que la aproximación al estudio de la Geometría con uno y otro software es de características diferentes por la manera en que se manipulan los objetos.



La idea de este capítulo, como se mencionó, es proponer actividades de ejemplo que apliquen las ideas recopiladas en los capítulos y secciones precedentes. La intención es, pues, que estas actividades pertenezcan a un micromundo, por lo que en las siguientes secciones se describen los componentes que integran las actividades propuestas.

5.2.1. Cabri-Géomètre en el aprendizaje de la demostración

El componente técnico del micromundo que se propone corresponde al soporte físico o la herramienta utilizada, que en este caso es el software al que se considera y que es *Cabri-Géomètre*[26] Es importante mencionar que este paquete informático, de origen francés, no es el único software para Geometría Dinámica que existe en el mercado, sino que hay muchos otros, como son *The Geometer's Sketchpad* (antes *El Geómetra*, estadounidense), *Geolab* (mexicano), *Geogebra* (austriaco), *Geometric Supposer*, *Cinderella* y *GEUP*. El asunto central es que, a pesar de sus diferencias por las arquitecturas de los software y las concepciones de los autores, estos paquetes comparten características comunes que permiten estudiar la Geometría de una manera dinámica, por lo que finalmente la decisión de cuál utilizar debe ser tomada de acuerdo a las necesidades de las actividades diseñadas (en este caso del micromundo que se propone) y las condiciones reinantes (que en ocasiones son hasta económicas) y no a criterios de popularidad y nacionalismo. En este libro se propone un micromundo que utiliza a Cabri-Géomètre como su componente técnico, por lo que toda referencia a aspectos técnicos en las actividades es a opciones de este software en particular. No obstante, esto no es impedimento para que las actividades propuestas sean adaptadas a las características técnicas de cualquier otro software para Geometría Dinámica, ya que la finalidad es que los alumnos estudien y aprendan Geometría utilizando una herramienta y no que se vuelvan únicamente expertos en el uso de un software en particular.

Cabri-Géomètre, como software para Geometría Dinámica, ofrece la oportunidad de trabajar con construcciones geométricas bajo un "espíritu" euclidiano que tiene una correspondencia con la Geometría Euclidiana (Mariotti, 2000:28). Dentro de las características que diferencian una aproximación a la Geometría utilizando este

[26] La primera parte *Cabri* es el acrónimo de "Cahier de brouillon interactif" que significa literalmente "Cuaderno de bosquejo interactivo", mientras que "Géomètre" significa "Geómetra".

software, a comparación con la tecnología de papel-y-lápiz, se tienen (Straesser, 2001:320): la posibilidad de definir rutinas o cadenas de construcciones bajo el nombre de macros, la de construir lugares geométricos, pero, más que nada, lo que caracteriza a este tipo de software para Geometría Dinámica, y en particular Cabri, es "la transformación continua en tiempo real llamada comúnmente '**arrastre**'" (Goldenberg y Cuoco, 1998:351). El arrastre permite la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos por el usuario mediante el uso del ratón (o algún otro periférico de la computadora) sin que se dejen de preservar las relaciones geométricas con las que fueron construidos.

El arrastre tiene consecuencias en la apreciación de la Geometría, pues el software se constituye en un mediador semiótico (Vygotski, 1979) entre el conocimiento geométrico y el usuario, siendo que las funciones del arrastre pueden ser diversas y no necesariamente coinciden en todos los individuos. Por ejemplo, Diaz Barriga (2002:23) considera dos tipos de manipulación de objetos geométricos a través del arrastre: la manipulación *directa*, que es "cuando el sujeto tiene la sensación de que atrapa el objeto con el que está interactuando", y la manipulación *indirecta*, que es en cualquier otro caso. Olivero (2003b:59-60) desde un punto de vista fenomenológico hace una clasificación de las funciones del arrastre:

- El arrastre como *retroalimentación de las acciones* que realiza el usuario, permitiéndole tener el control sobre la construcción.
- El arrastre como *mediador entre la figura y el dibujo*, permitiéndole al usuario hacer una distinción entre ambas nociones.
- El arrastre como *modo de examen* o *modo de búsqueda* que le permite al usuario examinar su construcción y buscar propiedades invariantes.

Por otro lado, un grupo de investigadores de Turín, Italia, han realizado un análisis de las modalidades cognitivas del arrastre que alumnos del nivel medio utilizan para resolver problemas geométricos observando que incluso mantienen cierta jerarquía en la obtención del control sobre el proceso de arrastre y durante el proceso de construcción de la demostración. Esas modalidades son las siguientes (Arzarello, Olivero, Robutti, Paola, 1999; Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002; Olivero, 2003b):

- "*Arrastre errante*: el mover los puntos básicos en la pantalla de manera aleatoria, sin un plan, a fin de descubrir configuraciones o regularidades interesantes.
- "*Arrastre de borde*: el mover un punto semi-arrastrable[27] que ya está ligado a un objeto.
- "*Arrastre guiado*: el arrastre de puntos básicos de una figura a fin de darle una forma particular.
- "*Arrastre de lieu muet*:[28] el mover un punto básico de tal manera que la figura mantenga una propiedad descubierta; esto significa que está siguiente una trayectoria oculta (lieu muet), incluso sin ser consciente de esto.

[27] "Un punto semi-arrastrable es un punto en un objeto que puede ser movido pero sólo sobre el objeto al que pertenece."

- "*Arrastre en línea*: el dibujar nuevos puntos en los que se mantiene la regularidad de la figura.
- "*Arrastre ligado*: el ligar un punto a un objeto y moverlo en tal objeto.
- "*Examen de arrastre*: el mover puntos arrastrables o semi-arrastrables a fin de ver si la figura mantiene las propiedades iniciales." (Olivero, 2003b:66)

Precisamente en cuanto a la posibilidad de validación se tiene la última modalidad, la de *examen de arrastre*, pues es en ésta que el arrastre explota la capacidad del software para mantener las relaciones geométricas entre los elementos de una construcción y así es posible verificar si está construida correctamente (Mariotti, 2000).

Además, esta capacidad de manipulación directa de las construcciones podría permitirle al alumno comenzar a diferenciar entre lo que se denomina *dibujo*, que corresponde a las representaciones gráficas que se tienen de un objeto geométrico (como ya se comentó en el capítulo anterior), y *figura*, que se refiere a la relación que se establece entre el objeto geométrico y sus dibujos o representaciones gráficas (Laborde y Capponi, 1994:168-169), lo cual está relacionado con la capacidad del individuo de "ver" más allá de la representación gráfica que tiene enfrente y llegar a un grado de abstracción mayor (Hoyles y Jones, 1998:124). Sin embargo, no sólo es necesario precisamente que el usuario se percate de esa diferencia para poder explotar efectivamente el carácter dinámico del software, sino también considerar las dependencias que se establecen entre los diversos objetos geométricos que intervienen en una cierta construcción (Hölzl, 1995:123); como dice Straesser (2001:323):

> "Uno tiene que pagar por esta facilidad y estructura al considerar cuidadosamente los rasgos característicos que no están presentes en la geometría tradicional de papel y lápiz."

Así, de esta manera, el software para Geometría Dinámica en general, y Cabri-Géomètre en particular,[29] se puede convertir en un ambiente que propicia la exploración de la Geometría por parte del usuario, abriéndole la posibilidad de generalizar situaciones y buscar casos particulares para construcciones realizadas. Sin embargo, puede provocar también situaciones que modifican la percepción clásica, de papel y lápiz, de la Geometría escolar e introducir nuevas cuestiones que, a su vez, generan nuevos problemas para ser considerados en la labor docente y en la investigación de Didáctica de la Matemática.

Uno de estos problemas está relacionado con el aprendizaje de la demostración en Geometría, pues el software para Geometría Dinámica es capaz de proporcionar mucha información basada en la experiencia y que le puede llevar a que no sienta una necesidad por producir justificaciones con deducciones locales o bien, demostraciones. Es evidente que este problema está relacionado con la concepción que se tenga de demostración y las

[28] "Lieu muet" significa literalmente "lugar mudo", término que utiliza la autora (y otros autores) porque se refiere a una trayectoria que no "dice" explícitamente cual es su forma, pues es desconocida.

[29] El lector puede observar que la gran mayoría de las referencias teóricas que aparecen aquí están dirigidas a Cabri-Géomètre, pero como éste comparte con los demás software para Geometría Dinámica su rasgo característico que es el *arrastre*, la gran mayoría de las conclusiones en el ámbito de la Didáctica de la Matemática que se plasman pueden extrapolarse a los demás software de este tipo.

funciones que se le pueden otorgar en el salón de clase, ya que si se acepta que una demostración únicamente explica y convence sin una estructura definida en los argumentos entonces con la pura observación de la pantalla y con el uso de las herramientas que proporciona el software podría ser suficiente. Incluso el uso combinado del software con problemas abiertos pareciera que iría en esa dirección, pues como Mariotti y Maracci (1999:266) señalan, al enfrentarse a situaciones con este tipo de problemas se busca una explicación y un convencimiento más que una validación, por lo que "el argumento resultante puede ser muy exitoso en explicar una respuesta, pero puede ser complemente inadecuado como una prueba de una conjetura." En ocasiones, y por consideraciones relacionadas con el contrato didáctico, es necesario llegar a pedir explícitamente que se "demuestre" o se "pruebe" algo (aunque aún no se haya observado) para que los alumnos se sientan obligados a construir la demostración.

Desde este punto de vista se puede volver inútil construir una demostración, pues ya existe el convencimiento de que un hecho es verdadero a partir de lo observado en la pantalla de la computadora. No obstante, Michael de Villiers, al enfrentarse ante esta situación encontró que es precisamente el trabajo de explicar las observaciones y la intervención del profesor lo que puede ayudar a construir justificaciones deductivas a partir de las observaciones hechas con software para Geometría Dinámica:

> "Aunque los alumnos pueden no mostrar mayor necesidad de convencimiento en tales situaciones, he podido inducir más curiosidad preguntándoles **por qué** piensan que un resultado en particular es verdadero; les desafío a intentar y *explicarlo* (…). Los alumnos admiten rápidamente que la verificación inductiva meramente confirma; lo cual no proporciona un sentido satisfactorio de *iluminación*, es decir, una intuición o entendimiento en cómo eso es una consecuencia de otros resultados familiares. Los alumnos por tanto encuentran realmente satisfactorio ver un argumento deductivo como un intento de explicación, en lugar de verificación." (1995:14)

Por su parte Arzarello, Olivero, Robutti y Paola (1999:334) consideran que Cabri ayuda por las posibilidades de arrastre que tiene y por el aumento en el control teórico en la búsqueda de propiedades invariantes, ya que "favorece la formulación de enunciados de forma condicional 'si... entonces', gracias a la relación entre los objetos libres (que se pueden mover) y los objetos dependientes de éstos."

Así que a partir de las observaciones hechas con el software es necesario que el alumno realice el proceso para escribir sus argumentos (ver por ejemplo Olivero, 2000), pues la construcción de una prueba o de justificaciones basadas en argumentos deductivos evidentemente no son realizados por el software, sino por el individuo que toma información de la computadora y la estructura mediante el razonamiento y el análisis, ya que le ofrece la posibilidad de involucrarse en acciones o aspectos de exploración que los expertos logran de una manera espontánea (Arzarello, Olivero, Robutti, Paola, 1999). En algún momento el alumno deberá separarse de la computadora y expresar (verbal o lingüísticamente) tales justificaciones a fin de avanzar hacia la construcción de demostraciones. En todo caso, y como se comentó unos párrafos antes, un micromundo no está compuesto únicamente por este componente, así que la

intervención del profesor, incluyendo su planeación y las actividades, se vuelven indispensables para lograr la construcción de justificaciones que no se basen únicamente en la información proporcionada por el software a través de la pantalla de la computadora.

Hay dos aspectos en la arquitectura de Cabri-Géomètre que resultan interesantes de resaltar por las posibilidades que ofrecen al profesor y que a continuación se tocarán.

Por un lado, Cabri-Géomètre tiene la capacidad técnica de que al guardar los archivos generados por el usuario (que en una clase serían los alumnos) registra el orden en que fueron creados cada uno de los objetos de la construcción, así como el tipo de objeto que es. Esta posibilidad es recuperada con la opción Revisar construcción[30] del menú Edición y permite ir paso a paso en la reconstrucción de la construcción guardada en un archivo, sin importar si esto se hace inmediatamente o después de varios días. Esta opción del programa abre aún más la posibilidad de considerarlo como una *ventana* del pensamiento del alumno, pues permite rastrear y analizar el proceso de la construcción que se realizó como reflejo de los razonamientos y procesos puestos en marcha para la resolución de las situaciones planteadas. Además, las opciones del menú Sesión abren todavía más estas posibilidades de rastreo al guardar sesiones en una serie de archivos y así pudiendo ver, por ejemplo, las transformaciones de las construcciones por medio de movimientos de objetos que los alumnos realizaron, que podrían representar exploraciones, o el borrado de objetos, que podrían representar posibles intentos fallidos o descartados. La diferencia es que aquélla opción es automática, y ésta última tiene que ser activada por el usuario cada vez que se quiera guardar una sesión.

Por otro lado, el programa también tiene la capacidad técnica de modificar sus menús (quitando o añadiendo opciones) a fin de cumplir con los objetivos de las actividades que se puedan plantear. En el caso del micromundo que se propone en la siguiente sección se sugiere que sean eliminadas todas las opciones de los menús Verificar y Transformaciones. El primero de ellos contiene opciones que le permiten al usuario verificar utilizando el ratón si varios puntos son colineales, si objetos lineales (como rectas o segmentos) son paralelos o perpendiculares, si algunos objetos son equidistantes, por ejemplo, y su eliminación obedece al hecho de que se busca que los alumnos propongan argumentos y justificaciones basados en propiedades geométricas y no sólo en opciones del programa. El segundo de estos menús contiene opciones para realizar simetrías, rotaciones y traslaciones, y su exclusión se debe a que estas operaciones no están incluidas en las actividades que se proponen.

5.2.2. Las actividades

En esta sección y la siguiente se exponen las partes del componente pedagógico del micromundo propuesto, es decir, lo que le da sentido al uso del componente técnico y que establece la relación de éste con el conocimiento dentro del ambiente escolar.

En la primera parte se abordan las actividades, las cuales se exponen en general estas actividades, a manera de guía, y se proponen hojas de trabajo que podrían ser utilizadas,

[30] Esta opción se refiere a una de las opciones de los menús del software Cabri-Géomètre. En lo sucesivo cuando se haga este tipo de referencias se utilizará un tipo de letra diferente al normal para destacar que se hace referencia a una opción o un comando del software.

pero siempre con las consideraciones necesarias impuestas por el ambiente, el contexto y, por supuesto, los alumnos.

Como se ha mencionado desde el inicio del capítulo, las actividades que se proponen bajo la consideración de la unidad cognitiva de teoremas, tienen que ver con el uso de propiedades de paralelismo en triángulos y cuadriláteros a fin de que los alumnos desarrollen justificaciones de sus observaciones que los lleven a establecer argumentos deductivos.

Aunque las actividades en general están relacionadas entre sí, se pueden agrupar en las que tienen que ver con triángulos y las que tienen que ver con cuadriláteros. En cada uno de estos dos grupos se puede observar el siguiente esquema:

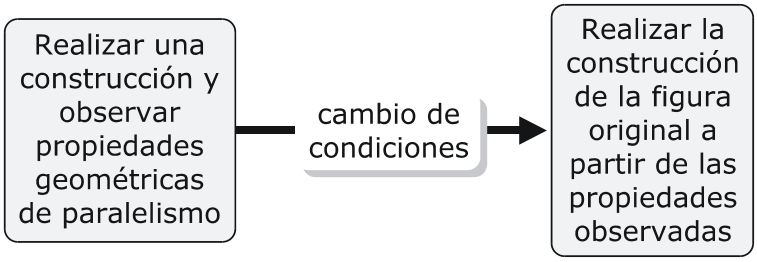

Realizar una construcción y observar propiedades geométricas de paralelismo
cambio de condiciones
Realizar la construcción de la figura original a partir de las propiedades observadas

Figura 5-1.

Es decir, al inicio de cada uno de los grupos de actividades se realizan construcciones geométricas a fin de que los alumnos lleven a cabo la observación del papel que tiene el paralelismo de los lados de las figuras en las construcciones solicitadas. Este trabajo se realiza bajo la coordinación del profesor y se puede recurrir a hojas de trabajo, aunque dosificadas adecuadamente. Posteriormente se propone un "cambio en las condiciones", ya que se pretende que, bajo el supuesto de que se hace una asociación entre una construcción original y una secundaria apoyada por el paralelismo entre los lados, los estudiantes puedan recuperar la original a partir de la secundaria, esto es, para realizar las construcciones inversas a partir de las propiedades observadas. Este esquema obliga a los alumnos a observar precisamente las propiedades geométricas de las construcciones a fin de utilizarlas en la construcción de justificaciones.

Las actividades tienen que ver con la construcción y observación de propiedades geométricas para triángulos y cuadriláteros utilizando sus respectivos *polígonos de los puntos medios*, que son aquellos obtenidos al considerar como vértices los puntos medios de los lados del polígono original. Así que en el caso de las actividades con triángulos se utilizan *triángulos de los puntos medios* y en el caso de los cuadriláteros, *cuadriláteros de los puntos medios*. Existe la posibilidad de ampliar la gama de polígonos, y de hecho es deseable que los alumnos hicieran por su parte exploraciones y observaciones al respecto, en ese sentido al final se proponen algunas líneas que pueden ser seguidas.

Siguiendo la idea de la unidad cognitiva de los teoremas, las actividades están organizadas en dos ciclos del tipo:

Figura 5-2.

Durante este proceso, en términos generales, los alumnos miden las construcciones, especialmente en la primera etapa de la construcción de las figuras y las de las respectivas figuras de los puntos medios, utilizan la función de arrastre para explorar la hechura de las construcciones y, posteriormente, proporcionan argumentos que justifiquen las observaciones apoyadas en la construcción de la figura original y la secundaria (o *de los puntos medios*), además de que estas conjeturas pueden permitir detectar condiciones necesarias y suficientes que tenderían idealmente a la deducción.

Así pues, de manera general existen diversos tipos de requerimientos que se les hacen a los alumnos. Algunos de estos tienen que ver con el hecho de que construyan objetos a fin de que observen e identifiquen propiedades. Estas dos acciones les permiten a los alumnos, en cierto momento, tomar decisiones sobre las acciones a seguir o bien verificar, vía el arrastre principalmente, lo correcto de sus construcciones, las propiedades que se puedan observar o las relaciones que se establecen.

A continuación se exponen los ciclos de actividades, con una descripción somera de cada una, para después ampliarlas con una guía y hojas de trabajo. Hay que decir que un antecedente de éstas se encuentra en Acuña (s.f.), pero que fueron modificadas y probadas en Larios (2005d), mostrando ahora adecuaciones como resultado de un proceso de mejoramiento.

5.2.2.1. Ciclo de actividades de triángulos

El primer ciclo tiene que ver con las actividades con triángulos (ver la Figura 5-3, más adelante). En la primera actividad (*T1*) se les pide a los alumnos que realicen la primera construcción propuesta (de un triángulo y de su *triángulo de los puntos medios*), así como una exploración de la cual se obtendrán propiedades sobre el paralelismo entre los lados de ambos triángulos, así como de las relaciones que hay entre los perímetros y las áreas de ambos polígonos. En este punto sólo se le pide al alumno que exprese tales observaciones.

En la actividad *T2* se continúa con la exploración de la situación recíproca de la actividad anterior a fin de que el alumno tenga más elementos sobre las propiedades del *triángulo de los puntos medios* construido. Los alumnos exponen sus observaciones y las preguntas planteadas en las hojas de trabajo llevan la intención de que esté seguro de

que la reciprocidad de las situaciones es válida, de esta manera se hace hincapié en que la relación de dependencia entre la figura original y la de los puntos medios se apoya en el paralelismo de los lados respectivos.

Si bien no se realiza una demostración, en la actividad *T3* se busca, al pedírsele al alumno que construya el triángulo original a partir de un *triángulo de los puntos medios*, que el alumno continúe con la búsqueda de justificaciones con base en las propiedades que ha observado precisamente a través de una propuesta de una construcción sin la computadora encendida. En seguida se realiza una verificación de su procedimiento por medio de la construcción y comprobación de la misma en la computadora. En caso de que la construcción, o el procedimiento propuesto, fallen entonces viene una exploración que permita determinar cuál fue el error.

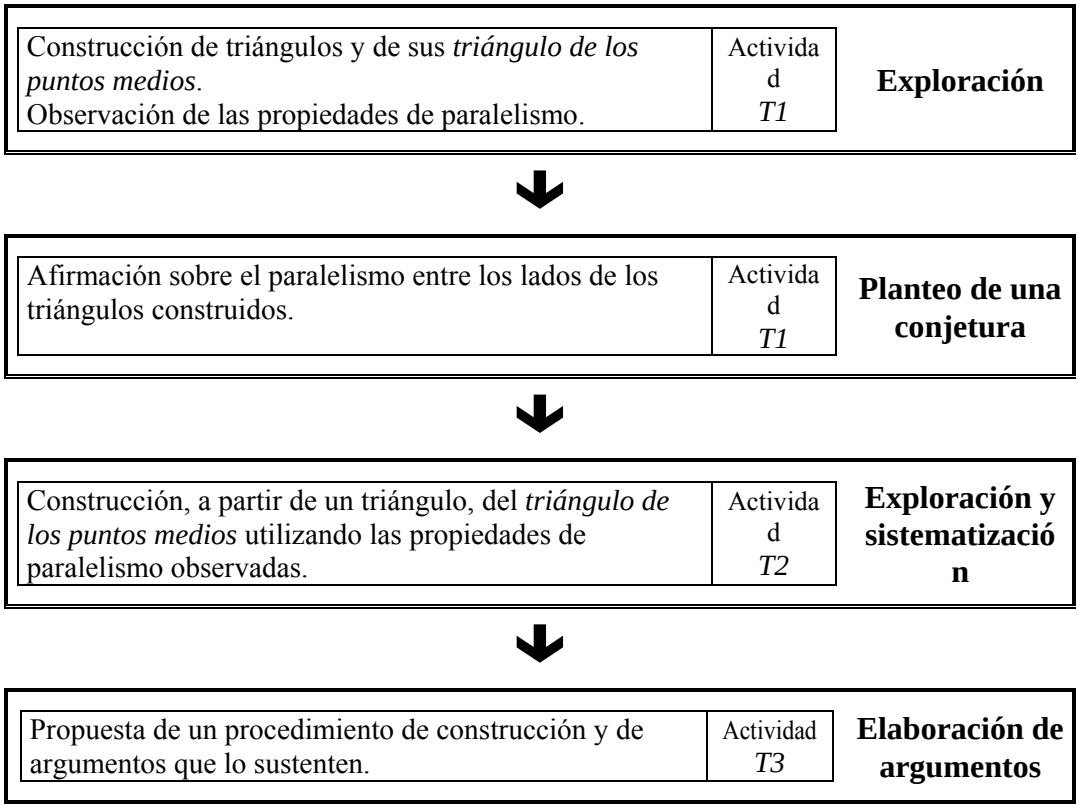

Construcción de triángulos y de sus *triángulo de los puntos medios*.
Observación de las propiedades de paralelismo.
Actividad *T1*
Exploración
Afirmación sobre el paralelismo entre los lados de los triángulos construidos.
Actividad *T1*
Planteo de una conjetura
Construcción, a partir de un triángulo, del *triángulo de los puntos medios* utilizando las propiedades de paralelismo observadas.
Actividad *T2*
Exploración y sistematización
Propuesta de un procedimiento de construcción y de argumentos que lo sustenten.
Actividad *T3*
Elaboración de argumentos

Figura 5-3.

5.2.2.2. Actividad de triángulos 1 (T1)

Como primer paso se les pide a los alumnos que construyan un triángulo cualquiera, cuyos vértices se llamarán (por comodidad) *A*, *B* y *C*. Recordemos que para realizar esta acción se utiliza la opción para construir el triángulo y para ponerles nombres a los vértices.

Resulta importante que los alumnos, desde este momento, se percaten de la capacidad distintiva del software: el arrastre. Activando la opción deben darse cuenta de las posibilidades de modificar la forma, tamaño y posición del triángulo. Desde este momento es necesario que el profesor esté al pendiente del significado que los alumnos

atribuyan a esta operación, ya que pueden ir desde la percepción adecuada del arrastre como productora de una gran diversidad de casos de la construcción hasta el de una herramienta física útil sólo para "acomodar" el dibujo. Estos fenómenos se comentarán más a profundidad en la siguiente parte del artículo.

Lo siguiente es que los alumnos construyan el *triángulo de los puntos medios* a partir del que ya tienen. Para ello tienen que construir los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo utilizando la opción y luego construir el triángulo utilizando tales puntos como vértices. Se puede tener orden en las construcciones de los alumnos pidiéndoles que llamen *D* al punto medio del lado *BC*, *E* al de *AC* y *F* al de *AB*. De esta manera el triángulo *DEF* es el *triángulo de los puntos medios* del triángulo *ABC* (ver la Figura 5-4).

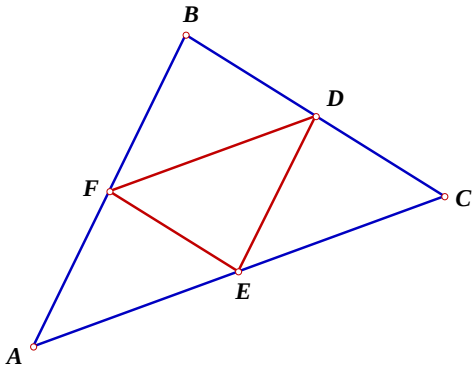


Figura 5-4.

En este punto resulta importante, durante el proceso de aprehensión de la potencialidad dinámica del software, que los alumnos verifiquen si la construcción está bien hecha, es decir, que el dibujo refleje las relaciones geométricas de la figura. Lo ideal sería que los alumnos utilizaran en este momento el arrastre en su modalidad de *examen de arrastre* al mover los vértices del triángulo *ABC* para observar si realmente el triángulo *DEF* que hicieron es el *triángulo de los puntos medios* del primero.

Ahora bien, utilizando la opción se pueden medir los perímetros de los dos triángulos para establecer cuál es la razón entre ellos. Pero también, y más importante, se puede establecer el paralelismo entre los lados de los dos triángulos: *AB* es paralelo a *DE*, *BC* a *EF* y *AC* a *DF*. Esta propiedad es lo que une a las diversas actividades, por lo que se hace necesaria su observación. Una posibilidad es pedirle a los alumnos que determinen cuál es la posición entre sí de cada una de las parejas de lados mencionadas.

Resulta conveniente que los alumnos realicen la exploración y la investigación en parejas, ya que así pueden compartir observaciones y opiniones, pudiendo así formularlas verbalmente. Después es adecuado realizar una discusión grupal a fin de que se compartan las observaciones, las posibles conjeturas y las justificaciones iniciales de las observaciones y las conjeturas. Debido a que el interés es el paralelismo, se puede conjeturar (atendiendo a la Figura 5-4) que *los lados de un triángulo* ABC *y los de su triángulo de los puntos medios (*DEF*) son paralelos entre sí* (**conjetura 1**).

Dos observaciones importantes: primero, es muy posible que los alumnos del nivel medio no planteen una conjetura en los términos en que se acaba de hacer, sino que podrán hacerlo sin atender algunos detalles o con imprecisiones; será parte de la labor del profesor ayudar a refinar la afirmación lo más posible, eliminando las imprecisiones pero sin crear confusiones. Segundo, hay que hacer énfasis en que, para continuar con las actividades propuestas, se tiene que observar el paralelismo planteado, pues las justificaciones proporcionadas no necesariamente serán deductivas ya que para ello los alumnos necesitarían tomar en cuenta otros resultados que el profesor, después de que los alumnos expusieran sus justificaciones y las refinaran, puede proporcionar para ligarlo con la discusión. ¿Podría el lector seleccionar algún teorema que ayude al respecto? Sugerencia: una buena opción es recurrir a la semejanza entre triángulos, pero se le deja al lector determinar cómo usarlo.

En este punto se observa la conveniencia de eliminar las opciones de verificación del programa, pues así se evita la posibilidad de que los alumnos le "pregunten" al programa (utilizando la opción) si las parejas de lados son paralelos entre sí y, al obtener una respuesta, no necesiten más argumentos para convencerse (la computadora se convierte en árbitro o autoridad).

En las propuestas de hojas de trabajo que se reproducen a continuación[31] el lector podrá notar que hay algunos renglones que están sombreados. Esos espacios pueden ser dedicados al intercambio de ideas, a la colaboración colectiva o a la discusión grupal (dirigida por el profesor) que lleve a la obtención de conclusiones generales, a la difusión de estrategias y observaciones realizadas y, muy importante, a la formulación verbal (o escrita) de justificaciones geométricas. La primera hoja de trabajo es la siguiente:

Triángulos (1)

Nombre del alumno: _____

Enciendan la computadora y realicen las siguientes actividades:

1. Construyan un triángulo (con la opción) y pónganle nombre a sus vértices (con la opción): A, B y C.

2. Construyan ahora los puntos medios de los lados del triángulo utilizando la opción . A estos puntos llámenles D al que quedó entre B y C, E al que quedó entre A y C, y F al que quedó entre A y B.

Después de mover algunas veces los vértices del triángulo contesta:

a) Los puntos medios del triángulo original ¿son también puntos medios del nuevo triángulo?___

_____

b) ¿Por qué? _____

_____

_____

[31] Se le insiste al lector que si tiene la intención de utilizar estas propuestas, entonces puede y debe modificarlas de acuerdo a las condiciones de sus alumnos.

3. Construyan el triángulo que tiene como vértices los puntos D, E y F, al que llamaremos "*triángulo de los puntos medios*".

4. Muevan los vértices del triángulo grande (el ABC) varias veces y observen lo que ocurre con el triángulo chico. Contesten:

c) ¿Hay alguna forma en que podrían checar si hicieron bien la construcción en la computadora?, ¿o cómo podrían saber si está bien hecha su construcción?_____

d) Después de haber movido el triángulo, ¿los puntos D, E y F, siguen siendo los puntos medios de los lados del triángulo ABC? _____

e) ¿Por qué sí o por qué no? _____

f) ¿Se parecen el triángulo grande y el chico (es decir, el triángulo ABC y el triángulo DEF)?, ¿por qué? _____

Comenten sus observaciones con sus compañeros.

5. Utilizando la opción midan los perímetros de ambos triángulos y compárenlos. Contesta:

g) ¿Hay alguna relación entre los perímetros de los dos triángulos? _____

h) Si encontraron alguna relación entre los perímetros, ¿por qué creen que existe? _____

Comenten sus observaciones con sus compañeros.

6. Observen la posición de los lados de los dos triángulos. En particular observen la posición del lado AC con respecto al lado DF, y el lado AB con respecto al DE. Muevan los vértices del triángulo grande varias veces y observen la posición entre los lados del triángulo ABC y los del triángulo DEF. Pónganse de acuerdo para contestar.

i) ¿Cómo son entre sí los lados del triángulo ABC con respecto a DEF? _____

j) Expliquen su respuesta _____

Compartan sus observaciones con sus compañeros y justifíquenlas.

5.2.2.3. Actividad de triángulos 2 (T2)

En esta ocasión se realiza una construcción recíproca a la primera: se utilizan rectas paralelas para construir los puntos medios de los lados del triángulo. Entonces se inicia nuevamente construyendo un triángulo *ABC* y el punto medio de **sólo un lado** que bien

puede ser el lado *BC*, llamándole *D*. Ahora bien, utilizando la opción se construyen dos rectas paralelas que pasen por *D*: una paralela al lado *AB* y la otra a *AC*. Evidentemente cada una de estas rectas corta al triángulo en dos puntos distintos, así que se le puede llamar *F* al punto que se creó en la intersección con el lado *AB* y *E* al que se creó sobre el lado *AC* (Figura 5-5):

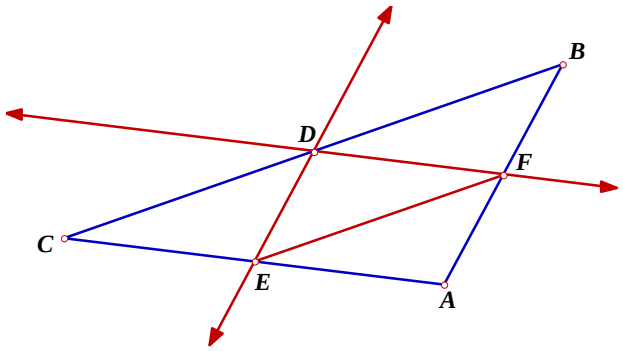


Figura 5-5.

Utilizando la opción se pueden ocultar las rectas paralelas y así construir el triángulo *DEF* con la opción adecuada.

La intención en este momento es observar ambos triángulos y pedirle a los alumnos que determinen dos cosas: si *BC* es paralelo a *EF* y si los puntos *D*, *E* y *F* son los puntos medios de los lados del triángulo *ABC*, porque si así lo fuesen entonces el triángulo chico sería el *triángulo de los puntos medios* del grande. Nuevamente una discusión grupal ayudará a que los alumnos compartan las observaciones y las conjeturas planteadas. Siguiendo la misma línea de este trabajo, se puede conjeturar (atendiendo a la nomenclatura de la Figura 5-5) que *si a un triángulo* ABC *se le traza el punto medio de un lado (*BC*) y luego se trazan rectas paralelas a los otros dos lados que pasen por dicho punto medio, éstas determinan los puntos medios de los lados restantes del triángulo, y estos puntos medio junto con el primero trazado sobre* BC *son los vértices del triángulo de los puntos medios del original* (**conjetura 2**).

Esta afirmación es un resultado directo de la aplicación del Teorema de Tales, pero (nuevamente) la intención no es que el profesor proporcione de manera inicial la justificación (la prueba), sino que los alumnos justifiquen, expliquen y se convenzan.

La hoja de trabajo propuesta es la siguiente:

Triángulos (2)

Nombre del alumno: _____

Realicen las siguientes actividades:

1. En un archivo nuevo un triángulo ABC y construyan el punto medio del lado BC que se llamará D.

2. Con la opción (que sirve para trazar rectas paralelas) construyan la recta paralela al lado AC que pase por el punto D. El punto donde esta recta que construyeron corta al lado AB es el punto F.

3. Utilizando la misma opción que en el paso anterior, construyan la recta paralela al lado AB que pase por el mismo punto D. El punto donde esta última recta corta al lado AC es el punto E.

4. Construyan un triángulo DEF usando la opción . (Recuerda que pueden ocultar los trazos auxiliares usando la opción .)

5. Contesten:

a) ¿Cómo son los lados BC y EF entre sí? _____

b) ¿Por qué? _____

_____

_____

c) Tal como fueron construidos las rectas paralelas a los lados para hacer el triángulo chico, ¿los vértices, D, E y F, serán o no los puntos medios de los lados del triángulo ABC? (sí o no) _____

d) ¿Por qué sí o por qué no? _____

_____

_____

_____

_____

e) Para responder las dos preguntas anteriores, ¿midieron?, ¿o cómo le hicieron? _____

_____

_____

_____

f) ¿Será posible que los puntos D, E y F **no** sean los puntos medios de los lados del triángulo ABC?, ¿por qué sí o por qué no? _____

_____

_____

_____

g) ¿Hay alguna relación entre los perímetros del triángulo grande y del chico?, ¿cuál es? _____

_____

_____

_____

h) ¿Tienen las mismas relaciones que las de los triángulos de la práctica anterior? _____

_____

Compartan sus observaciones con tus compañeros. Comenta las justificaciones que hicieron.

i) ¿Qué conclusión pueden obtener sobre la relación que hay entre los triángulos DEF y ABC que acaban de construir? _____

_____

_____

_____

j) ¿Por qué esa conclusión? _____

_____

_____

_____

Comenta con tus compañeros estas conclusiones.

5.2.2.4. Actividad de triángulos 3 (T3)

En esta actividad se cambia el procedimiento: en lugar de observar propiedades a partir de construcciones, se hará la construcción a partir de las propiedades.

En un trabajo en equipo y sin usar la computadora se les plantea la situación inversa a los alumnos: supongan que tienen el *triángulo de los puntos medios* (que hemos estado llamando *DEF*) y tienen que construir el triángulo original (al que hemos llamado *ABC*), ¿qué condiciones necesita tener el triángulo *DEF*? y ¿cómo le harían?

Para realizar esta construcción es necesario que los alumnos recuperen las observaciones sobre paralelismo hechas, determinen las condiciones necesarias para el triángulo *DEF* y planteen un procedimiento de construcción. Después del trabajo en equipo se puede realizar una discusión grupal inicial para que los alumnos se pongan de acuerdo en algunos puntos clave del proceso, los justifiquen y defiendan. Posteriormente se realiza la construcción en la computadora, por equipos.

Un procedimiento para la construcción, que recupera las propiedades de paralelismo observadas, es construir las rectas paralelas (con la opción) a cada uno de los lados que pasan por el respectivo vértice opuesto, las cuales se cortan entre sí en pares, para después construir el triángulo buscado considerando a los puntos de intersección de las rectas construidas como los vértices *A*, *B* y *C* (Figura 5-6). Utilizando la opción se ocultan las rectas y queda el triángulo *ABC*.

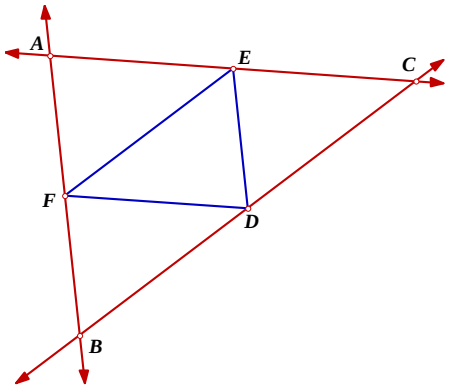


Figura 5-6.

Tras la construcción cuatro cosas son relevantes: primero, lo ideal sería que los alumnos verificaran si su construcción es correcta utilizando el arrastre como medio de examen moviendo los puntos independientes, es decir *D*, *E* o *F*. Segundo, la respuesta a si el triángulo *DEF* necesita alguna propiedad especial para iniciar la construcción es negativa, así que como profesor habría que estar al pendiente a ese respecto, pues los alumnos no siempre dan esta respuesta. Tercero, se debe verificar si realmente el procedimiento produce el triángulo *ABC* tal que el triángulo *DEF* sea el de los puntos medios de aquél, para cuestiones de convicción no es raro que algunos utilicen la opción para medir los lados de ambos triángulos, pero en este punto valdría la pena explorar el razonamiento deductivo y ayudar a los alumnos a que presenten justificaciones que se apoyen en las justificaciones y en los resultados proporcionados

en las dos actividades anteriores. Cuarto, se podría hacer una pequeña exploración sobre la siguiente pregunta: ¿a partir de un triángulo *DEF* cualquiera, cuántos triángulos *ABC* se pueden construir de tal suerte que aquél sea el *triángulo de los puntos medios* de éste último? La respuesta, que sería bueno que los alumnos buscaran, es "sólo uno".

Una posible hoja de trabajo es la siguiente:

Triángulos (3)

Nombre del alumno: _____

Realicen las siguientes actividades **sin utilizar la computadora por el momento**:

1. Ahora supongan que tienen que hacer la construcción al revés: hacer primero el triángulo de los puntos medios (el triángulo DEF) y luego el grande (el triángulo ABC). Piensen en un procedimiento que les permita lograr esto.

2. Contesten lo siguiente:

a) ¿Cuál sería el primer paso para la construcción? _____

_____

b) El triángulo chico (con el que van a empezar), ¿necesita tener alguna propiedad especial? ____

_____

c) ¿Puedes usar cualquier triángulo como *triángulo de los puntos medios*? _____

_____

d) ¿Cómo van a ser los lados del triángulo grande con relación a los del triángulo chico?, ¿por qué? _____

_____

_____

_____

e) ¿Los lados del triángulo grande podrán tener cualquier posición? _____

_____

f) ¿Dónde van a estar los vértices del triángulo grande? _____

_____

4. Escriban el procedimiento en el que pensaron para construir el triángulo grande: _____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

5. ¿Necesitaron usar la computadora para responder? _____

6. ¿Cuántos triángulos grandes diferentes pueden construir a partir de un triángulo chico dado? _

_____

Comenten su procedimiento y sus respuestas con sus compañeros.

7. Construye un triángulo (que no sea equilátero) y llámalo "el triángulo DEF", que va a ser el triángulo chico o de *los puntos medios*.

8. Usando el procedimiento que recién escribieron construyan el triángulo grande (el llamado ABC) a partir del que ya tienen en la pantalla.

9. Después de intentarlo contesta:

g) ¿Cómo quedan los lados del triángulo ABC con respecto a los del triángulo DEF? _____

10. Arrastren alguno de los vértices o de los lados del triángulo chico varias veces, observen y contesten:

h) ¿Los puntos D, E y F son los puntos medios de los lados del triángulo ABC? _____

i) Explica _____

j) ¿El triángulo DEF (el chico) es realmente el triángulo de los puntos medios? _____

Comenta tus respuestas con tus compañeros.

k) Si alguna de las respuestas anteriores es "no", ¿entonces por qué el triángulo DEF (el chico) no es el triángulo de los puntos medios del ABC (el grande)? _____

l) ¿Se puede mejorar?, ¿cómo se podría mejorar? _____

11. Si es necesario inténtelo de nuevo, recuerden que el objetivo es que el triángulo DEF sea el triángulo de los puntos medios de ABC.

Comenta tus respuestas con tus compañeros.

12. Escriban las conclusiones a las que se llegó en el grupo, tanto en relación al tamaño de los triángulos como a la posición de los lados de éstos entre sí:

5.2.2.5. Ciclo de actividades de cuadriláteros

El segundo ciclo, que se relaciona con las actividades con cuadriláteros (ver la Figura 5-7 más adelante) comienza en una exploración de un cuadrilátero y de su *cuadrilátero de los puntos medios* en la actividad *C1*. Durante esta exploración se pretende que el alumno identifique el tipo de cuadrilátero que es el *de los puntos medios* a partir de sus propiedades, que a la sazón es un paralelogramo. Esta identificación del cuadrilátero queda plasmada al final de la actividad mediante una afirmación (conjetura) que involucra el tipo de cuadrilátero obtenido.

En la actividad *C2* se retoma la afirmación de que el *cuadrilátero de los puntos medios* de un cuadrilátero cualquiera es un paralelogramo, para después continuar con la exploración y se propone que ésta tome una dirección regida por dos situaciones: la consideración de una de las diagonales del cuadrilátero y su relación con las propiedades observadas en el caso de los triángulos en la actividad *T2*. Al final de esta actividad se pide a los alumnos que proporcionen argumentos que sustenten adecuadamente la afirmación planteada al final de la actividad anterior, haciendo énfasis en el argumento deductivo.

Con la finalidad de que se observen las propiedades de paralelismo con más detenimiento, en la actividad *C3* se les pide a los alumnos que pongan en juego su capacidad de manejo mental de las figuras y retomen las propiedades observadas a fin de determinar qué propiedades debe cumplir un cuadrilátero dado para que su *cuadrilátero de los puntos medios* sea un rectángulo (definido como un paralelogramo de ángulos internos congruentes).

Finalmente, y ligado con la propuesta de la justificación de las propiedades del *cuadrilátero de los puntos medios*, aparece la actividad *C4* donde se les pide a los alumnos que recuperen el cuadrilátero original a partir de un paralelogramo que funcionará como el *cuadrilátero de los puntos medios*. Para ello se deben considerar las propiedades observadas en las actividades anteriores y que influyen en las características del cuadrilátero con el que comenzarían el procedimiento propuesto.

Construcción de cuadriláteros y sus *cuadriláteros de los puntos medios*.	Actividad *C1*	**Exploración**

Afirmación de que el *cuadrilátero de los puntos medios* es un paralelogramo.	Actividad *C1*	**Planteo de una conjetura**

Construcción de un cuadrilátero, de sus diagonales y de su *cuadrilátero de los puntos medios*; observación del paralelismo y de la relación con las observaciones de *T1*.	Actividad *C2*	**Exploración y sistematización**
Observación de propiedades necesarias obtener un cuadrilátero tal que su *cuadrilátero de los puntos medios* sea un rectángulo.	Actividad *C3*	

Se proponen argumentos que respalden el paralelismo de los lados del *cuadrilátero de los puntos medios*.	Actividades *C2* y *C3*	**Selección de argumentos**
Propuesta de un procedimiento para construir el cuadrilátero original a partir del *de sus puntos medios*, así como la justificación.	Actividad *C4*	

Figura 5-7.

5.2.2.6. Actividad de cuadriláteros 1 (C1)

Hay que construir un cuadrilátero, lo cual se logra utilizando la opción .[32] Conviene llamar a los vértices *A*, *B*, *C* y *D* para tener orden. Enseguida se realiza la construcción de su *cuadrilátero de los puntos medios* (utilizando las opciones y), llamándoles *E*, *F*, *G* y *H* a sus vértices (ver la Figura 5-8 más adelante).

Por medio del arrastre los alumnos pueden verificar si su construcción está bien hecha, pero también se les pide que identifiquen qué propiedades se mantienen invariantes al modificar el tamaño y forma del cuadrilátero original. El uso de la opción para medir longitudes puede ser utilizada para determinar que los lados opuestos del cuadrilátero *EFGH* miden lo mismo, con la finalidad de que observen propiedades relacionadas que son invariantes y que llevan al paralelismo entre los lados opuestos de este cuadrilátero. Nuevamente una discusión grupal dirigida por el profesor, donde los

[32] Es importante que se les avise a los alumnos que al crear o al considerar el último vértice (el cuarto) se haga un doble clic con el ratón para que el programa termine con la construcción del polígono.

alumnos presenten sus observaciones y las defiendan, podría llevar a conjeturar que *el cuadrilátero de los puntos medios de otro cuadrilátero tiene lados opuestos paralelos entre sí o que miden los mismo* (**conjetura 3**).

Esta afirmación puede refinarse durante la discusión grupal bajo la coordinación del profesor. Durante este proceso, y tras una revisión de los nombres de los cuadriláteros, se puede replantear la afirmación buscando también un formato de proposición condicional: *si EFGH es el cuadrilátero de los puntos medios de otro, entonces EFGH es un paralelogramo* (**conjetura 3**). El siguiente paso es realizar la justificación.

La hoja de trabajo que se propone es:

Cuadriláteros (1)

Nombre del alumno: _____

Realicen las siguientes actividades:

1. Construyan cuatro puntos, que se llamarán A, B, C y D, y utilícenlos como vértices para construir el cuadrilátero ABCD con la opción o la opción .

2. Construyan los puntos medios de los lados del cuadrilátero y llámenlos E (el que está entre A y B), F (el que está entre B y C), G (el que está entre C y D) y H (el que está entre A y D). Estos cuatro últimos puntos pueden ser los vértices de un cuadrilátero, ¡constrúyanlo! A este segundo cuadrilátero (EFGH) le llamaremos *el cuadrilátero de los puntos medios*.

3. Muevan algunos de los vértices del cuadrilátero y observen qué ocurre:

a) Después de que movieron alguno de los vértices ¿ocurre que el punto medio del lado (por ejemplo) AB que se llama E sigue siendo el mismo punto? _____

_____

b) ¿Es el punto medio?, ¿por qué sí o por qué no? _____

_____

_____

c) Después de mover el cuadrilátero varias veces, ¿cómo es el cuadrilátero EFGH? _____

_____

d) ¿Tiene alguna propiedad en especial? _____

_____

_____

Comenta sus respuestas con tus compañeros.

e) ¿La medida de los lados puede servir (pueden usar la opción)? _____

_____

f) ¿Existe alguna relación entre las medidas de los lados que son opuestos entre sí?, de ser así ¿cuál es? _____

_____

_____

4. Manipulen nuevamente el cuadrilátero ABCD y observen, sin utilizar las mediciones, las posiciones de los lados del *cuadrilátero de los puntos medios*. Pónganse de acuerdo para contestar:

g) Suponiendo que el cuadrilátero de los puntos medios tiene una forma especial, ¿que característica o propiedad tiene? _____

_____

_____

_____

h) Si suponemos que tiene alguna característica especial ese cuadrilátero, ¿cuál sería un nombre adecuado para él? Es decir, ¿es un cuadrilátero con nombre especial?, ¿cuál es? _____

_____

i) ¿Cómo son entre sí los lados opuestos del *cuadrilátero de los puntos medios*? _____

_____

_____

Comenta sus respuestas con tus compañeros.

9. Hasta ahora han construido un cuadrilátero y su *cuadrilátero de los puntos medios*, y han observado algunas propiedades del *cuadrilátero de los puntos medios* (algunas de las cuales acaban de escribir). En los siguientes renglones anoten como resumen los hechos que observaron (completen a partir de las primeras palabras escritas):

Si tenemos un cuadrilátero y se construyen los puntos medios de sus lados y luego se unen entre sí ocurre que... _____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

Comenta esta respuesta con tus compañeros.

5.2.2.7. Actividad de cuadriláteros 2 (C2)

A fin de proporcionar más elementos para la construcción de la justificación se les pide a los alumnos que construyan las diagonales del cuadrilátero original, aunque para ser más claros conviene comenzar con sólo una de ellas (la punteada en la Figura 5-8).

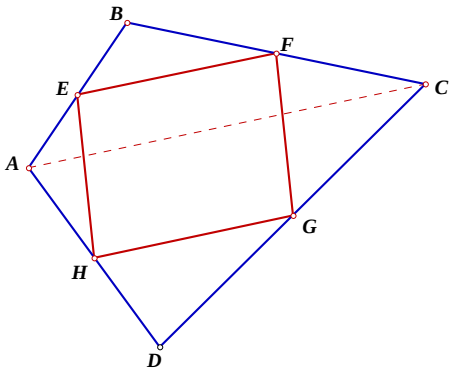


Figura 5-8.

Una acotación interesante. Al construir sólo una diagonal se observan sólo dos triángulos dentro del cuadrilátero (sin considerar el paralelogramo de los puntos medios), lo cual puede ayudar a relacionarlo con las actividades anteriores de triángulos, pues si se construyen las dos diagonales se crean cuatro triángulos y entonces el alumno

debe realizar un proceso de reconfiguración (Sánchez, 2003) de la figura que bien puede no llevarse a cabo.

Así pues, echando mano de la diagonal trazada (supongamos que es *AC*) y los triángulos que se crean al interior del cuadrilátero (consideremos el caso de *ABC*), se puede pedir a los alumnos que determinen qué relación hay entre las posiciones del lado *EF* del *cuadrilátero de los puntos medios* y la diagonal *AC* (que viene siendo uno de los lados del triángulo creado). Después de una exploración al respecto, la discusión grupal es una buena opción para que nuevamente los alumnos se pongan de acuerdo en sus observaciones y defiendan sus conclusiones.

La intención es que los alumnos puedan utilizar una parte de lo que llamamos antes **conjetura 1**, pues como *E* y *F* son puntos medios de los lados *AB* y *BC*, respectivamente, del triángulo *ABC*, entonces *EF* es un lado del *triángulo de los puntos medios* de aquél y, por tanto, es paralelo al lado *AC* del triángulo que, a la sazón, viene siendo una diagonal del cuadrilátero *ABCD*.

Pero además, el siguiente paso es que los alumnos investiguen qué pasa con el segmento *HG* con respecto a la misma diagonal *AC* (se utiliza otro triángulo). El proceder es similar al descrito en el párrafo anterior y entonces resulta que *HG* es paralelo a *AC*, por lo que *EF* es paralelo a *HG*. Utilizando a la otra diagonal del cuadrilátero original (*BD*) se puede llegar al caso de que *EH* es paralelo a *FG*.

Otra exploración que puede ser útil si se quieren extender esta actividad y la siguiente es una que lleve a observar la longitud de los lados del paralelogramo *EFGH* con respecto a las diagonales del cuadrilátero *ABCD*. La propuesta es que se deje en manos de los alumnos que junto con los mismos resultados de las actividades de los triángulos derivaría en el hecho de que los lados *EF* y *HG* miden cada uno la mitad que la diagonal *AC*, mientras que *EH* y *FG* miden también la mitad que *BD*.

La propuesta de hoja de trabajo es la siguiente:

Cuadriláteros (2)

Nombre del alumno: _____

Recuerden lo que hicieron en la sesión anterior y prosigamos:

1. Tras investigar el nombre de los cuadriláteros que tienen las características particulares del *cuadrilátero de los puntos medios* que hicieron la vez anterior, sabemos que es un **paralelogramo**. Queda aún pendiente el saber por qué ocurre esto o si siempre ocurre.

2. Construyan en la computadora otro cuadrilátero ABCD y el de *sus puntos medios*, tal como se hizo en la parte anterior.

3. Muevan los vértices del cuadrilátero ABCD, observen que los lados opuestos del *cuadrilátero de los puntos medios* son paralelos entre sí y contesten:

a) ¿Por qué los lados del *cuadrilátero de los puntos medios* se mantienen paralelos entre sí, aunque muevan lo vértices A, B, C y D con el ratón? _____

_____

_____

Coméntalo con tus compañeros.

4. Dibujen la diagonal del cuadrilátero grande que va de B a D y observen que se forman dos triángulos dentro del cuadrilátero, ¿cuáles son? _____

5. Se puede ver que los puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD también son los puntos medios de los dos triángulos que se formaron. ¿Cuáles son los puntos medios de los lados del triángulo que tiene a A como uno de sus vértices? _____

b) ¿Que pueden decir del segmento HE y de la diagonal que trazaron? _____

_____

c) ¿Que pueden decir del segmento GF y de la diagonal que trazaron? _____

_____

d) ¿Estos dos últimos hechos apoyan la idea de que HEFG es un paralelogramo? _____

e) ¿Por qué? _____

_____

_____

_____

Comenta estas observaciones con tus compañeros.

6. Si se traza la otra diagonal (y nos olvidamos por el momento de la primera que trazaron), se forman también dos triángulos como los de antes, ¿qué pueden decir de los lados EF y HG con respecto a la diagonal? _____

_____

_____

_____

_____

Comenta estas observaciones y las justificaciones con tus compañeros.

5.2.2.8. Actividad de cuadriláteros 3 (C3)

En esta actividad se va a considerar la definición de rectángulo como un paralelogramo cuyos ángulos internos son todos congruentes entre sí (miden 90°), pues comenzando con un cuadrilátero *ABCD* y su *cuadrilátero de los puntos medios EFGH* se les pide a los alumnos que manipulen aquél para que éste último sea rectángulo.

La intención es que, primero, los alumnos determinen si esto es posible, para luego, de serlo, determinar qué propiedades necesita tener el cuadrilátero *ABCD* para que ocurra. Al finalizar la exploración en equipos o parejas el compartir y defender los puntos de vista, mediante una discusión grupal coordinada por el profesor, es muy recomendable. Esta defensa de las observaciones y de las justificaciones propuestas de los alumnos puede ser encauzada hacia una estructura deductiva con la ayuda del profesor.

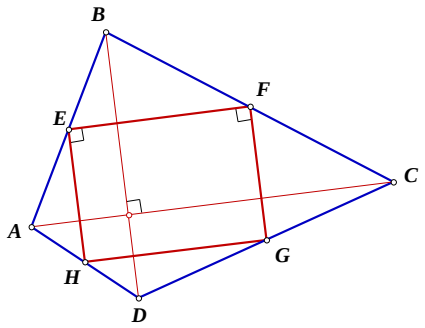


Figura 5-9.

El caso es el siguiente (Figura 5-9): como los lados adyacentes del paralelogramo *EFGH* son perpendiculares entre sí, por la definición de rectángulo, y como también las parejas de lados opuestos son paralelas a cada una de las diagonales del cuadrilátero *ABCD*, tal como se observó en la actividad anterior, entonces las diagonales deben ser perpendiculares entre sí para que el cuadrilátero *EFGH* sea un rectángulo.

Un reto extra es plantearle a los alumnos una nueva construcción del cuadrilátero *ABCD* y de su *cuadrilátero de los puntos medios* (*EFGH*) en la cual se utilice un procedimiento, ideado por los alumnos, de tal suerte que siempre *EFGH* sea un rectángulo. Una idea para el profesor es considerar que las propiedades recién observadas se centran en la perpendicularidad de las diagonales.

Lo siguiente es la hoja de trabajo propuesta:

Cuadriláteros (3)

Nombre del alumno: _____

Recuerden lo que hicieron en la práctica anterior y prosigamos:

1. La idea de esta actividad es hacer un cuadrilátero ABCD de tal manera que su *cuadrilátero de los puntos medios* (EFGH) sea un **rectángulo**.

Si es necesario comenta con tus compañeros si es posible que un rectángulo sea paralelogramo.

2. Construyan un cuadrilátero ABCD y su *cuadrilátero de los puntos medios*. Muevan los vértices del grande para que el de adentro quede como rectángulo. Observa lo que ocurre.

3. ¿Es posible que en algún momento el cuadrilátero EFGH sea un rectángulo o es imposible? (Si consideras que es imposible, ¿por qué sería imposible?) _____

_____

_____

_____

_____

_____

Coméntalo con tus compañeros.

4. En el caso de que hayan logrado que el cuadrilátero EFGH sea un rectángulo, contesten:

a) ¿Es necesario que el cuadrilátero ABCD tenga alguna propiedad especial?, ¿sí o no?, ¿cuál? __

b) Si tiene una propiedad especial, ¿por qué será? _____

Coméntalo con tus compañeros.

5. Ahora bien, si ahora tuvieran que investigar además lo que necesita el cuadrilátero ABCD para que su *cuadrilátero de los puntos medios* fuera un **cuadrado**, ¿cómo le harían?, ¿qué propiedades necesitaría ese cuadrilátero? _____

Comenten las conclusiones con tus compañeros.

Como comentario final a esta actividad, es posible plantear un reto a los alumnos en el cual se les pida que hagan la construcción de un cuadrilátero y la de su *cuadrilátero de los puntos medios* de tal manera que al arrastrar con el ratón los vértices de aquél, éste último sea siempre un cuadrado. ¿Podría el lector realizarla? (La opción quizá podría ser de utilidad.).

5.2.2.9. Actividad de cuadriláteros 4 (C4)

Al igual que en el caso de las actividades con triángulos, en esta actividad se busca que los alumnos trabajen "al revés". Para ello deberán haber observado las propiedades obtenidas a partir de las construcciones previas y con estos elementos realizar una construcción, con su procedimiento y justificación incluidos.

En un trabajo en equipo y sin usar la computadora se les plantea la situación inversa a los alumnos: se les pida que supongan que tienen el *cuadrilátero de los puntos medios* (que hemos estado llamando *EFGH*) y tienen que construir el triángulo original (al que hemos llamado *ABCD*). Para esto tienen que determinar las condiciones necesarias que debe tener *EFGH*, así como un procedimiento justificado en el cual recuperarán las observaciones hechas sobre paralelismo desde las actividades con triángulos. Después del trabajo en equipo se puede realizar una discusión grupal inicial para que los alumnos se pongan de acuerdo en algunos puntos clave del proceso, los justifiquen y defiendan. Posteriormente se realiza la construcción en la computadora, por equipos.

Hay que hacer una observación muy importante: existen dos diferencias importantes de esta actividad con respecto a la de triángulos y ello introduce dificultades en el proceso de exploración y de justificación de los alumnos porque, generalmente, no se

percatan de las diferencias creyendo que son iguales. No obstante, este desequilibrio es una oportunidad que puede aprovechar el profesor para hacer hincapié en la necesidad de observar y justificar adecuadamente, pues no todos los casos son iguales ni generalizables.

Pero aún no se han mencionado tales diferencias. La primera es que aparece una condición nueva que pareciera no tener nada que ver con las construcciones previas y es la localización del punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero *ABCD* (es recomendable que el profesor revise, previo a sus clases, las construcciones de las actividades anteriores para que observe que dicho punto puede estar en cualquier lugar), ya que puede ser arbitraria. La segunda diferencia, que es consecuencia de ésta primera, se comentará hacia el final de la actividad.

Un procedimiento posible de construcción es el siguiente:

Antes que nada se determina que el cuadrilátero *EFGH* debe ser un paralelogramo, no puede ser cualquier cuadrilátero (esto, ya de por sí, es una diferencia con respecto al caso de los triángulo). Por las observaciones hechas en las actividades *C2* y *C3* se sabe que los lados del paralelogramo *EFGH* deben ser paralelos a las diagonales del cuadrilátero *ABCD*.

El siguiente paso es construir las rectas donde quedarán las diagonales del cuadrilátero *ABCD*. Debido al paralelismo recién mencionado sólo hay que ver dónde poner el punto de intersección de tales rectas (que llamaremos *O*). La localización de este punto, como recién se dijo también, es arbitraria, por lo que por lo pronto se puede poner al interior del paralelogramo, tal como se muestra en la siguiente figura:

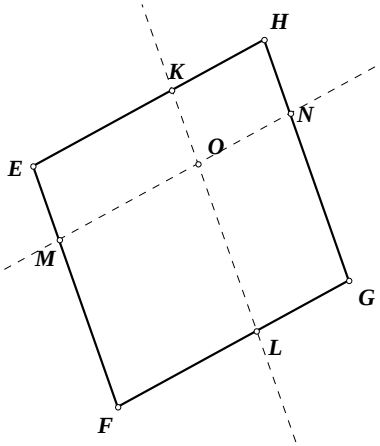


Figura 5-10.

Es importante mencionar que para los alumnos del nivel medio es muy común ponerlo precisamente en el interior del paralelogramo (suena lógico, pues será la intersección de dos diagonales). Pero además tienden a ponerlo cercano al centro del paralelogramo, llegando en ocasiones al grado de ponerlo justo en el centro al construir las rectas donde estarán las diagonales utilizando los puntos medios de los lados del paralelogramo.

Ahora bien, a la Figura 5-9 se le pueden añadir como trazos auxiliares un segmento y par de puntos para hacerla más claro lo que sigue. Llamando *K* al punto de intersección

de la diagonal *AC* con el segmento *HE* (lado del paralelogramo), *N* al punto de intersección de la diagonal *BD* con el segmento *GH*, *O* al punto de intersección de las diagonales *AC* y *BD* (como se mencionó en los párrafos de arriba) y construyendo el segmento *KN* obtenemos la siguiente figura:

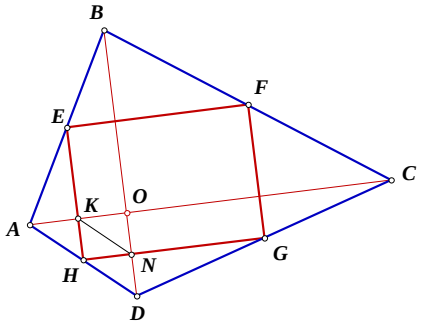


Figura 5-11.

En esta figura se puede observar que en el triángulo *ADO* el lado *AD* es paralelo a *KN*, así que para la construcción que se busca será necesario considerar la recta paralela a *KN* que pase por *H*. Precisamente las intersecciones de esta recta con las diagonales de *ABCD* son dos vértices de este cuadrilátero, que corresponden a *A* y *D*:

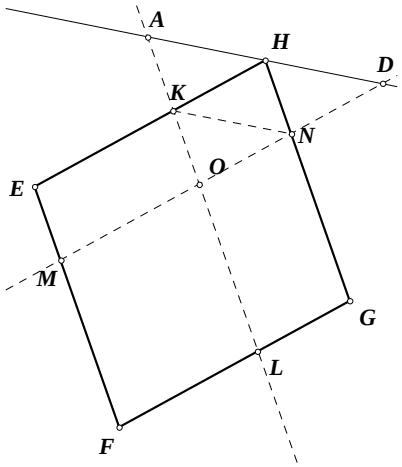


Figura 5-12.

Restaría entonces construir una recta que pase por *D* y *G* para que corte a *AL* (la diagonal), generando así el punto *C* que es el tercer vértice del cuadrilátero; construir otra recta que pase por *A* y *E*, para que genere al cuarto vértice, B, al cortar *DM* (la otra diagonal); y, finalmente, construir el último lado, *BC*, para obtener el cuadrilátero ABCD:

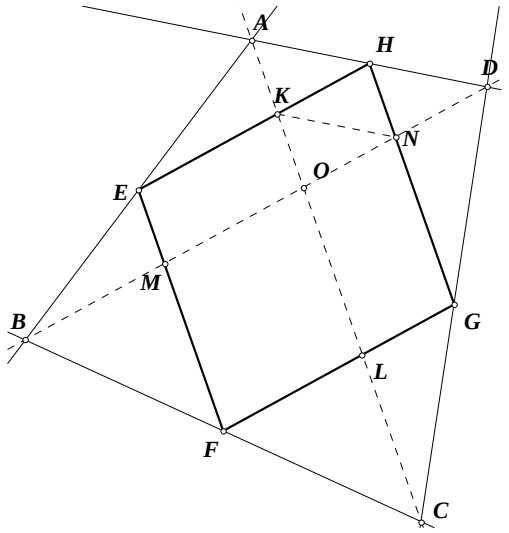


Figura 5-13.

Es posible garantizar que el cuadrilátero *ABCD* así obtenido es aquel cuyo *cuadrilátero de los puntos medios* es el paralelogramo inicial *EFGH*. Se le deja al lector la tarea de verificar que los puntos *E*, *F*, *G* y *H* son efectivamente los puntos medios del cuadrilátero *ABCD*, además de justificar adecuadamente el procedimiento propuesto.

Los alumnos pueden, una vez sorteado el problema de dónde colocar el punto *O*, llevar a cabo una construcción aceptable y buscar la justificación del procedimiento. También se pueden ampliar las exploraciones y una de ellas que vale la pena es ver si el cuadrilátero *ABCD* es único.

Aquí aparece la segunda diferencia importante que se mencionó arriba, pero que no se explicó. Esta diferencia es que, a consecuencia de la introducción de la localización arbitraria del punto *O* como condición inicial, este punto determina la forma del cuadrilátero *ABCD*. Como conclusión se tiene que dado un paralelogramo *EFGH* cualquiera, existe una infinidad de cuadriláteros *ABCD* tales que aquél sea *cuadrilátero de los puntos medios* de éstos.

Es importante mencionar que las limitantes de los alumnos para determinar esta condición adicional de la localización del punto *O* y para visualizar las posibles configuraciones de la construcción los llevan, como ya se dijo, a resolver su problema tomando en cuenta las características figurales de los objetos geométricos al fijar el punto *O* en el centro del paralelogramo, lo cual reduce muchísimo la posibilidad de realizar esta última exploración (la convierte, de hecho, en una exploración trivial). Es labor del docente orientar a sus alumnos para ayudarles a que superen esta situación y observen que existe una posibilidad mucho más amplia.

La hoja de trabajo que se propone es:

Cuadriláteros (4)

Nombre del alumno: _____

Recuerden lo que hicieron en la práctica anterior y prosigamos:

1. En esta actividad intentarán reconstruir un cuadrilátero ABCD a partir de su *cuadrilátero de los puntos medios*. Para ello tienen que comenzar con un cuadrilátero EFGH que funcionará como *cuadrilátero de los puntos medios*.

Comenta con tus compañeros sobre las características que debe tener el cuadrilátero EFGH.

2. Realiza la construcción del cuadrilátero EFGH de tal manera que lo puedas manipular y siga siendo lo que debe ser: un paralelogramo.

3. Ahora hay que pensar en cómo construir el cuadrilátero ABCD a partir del que tienen en la pantalla. Contesten:

a) ¿Qué condiciones necesitas para comenzar?, ¿es suficiente únicamente con el cuadrilátero EFGH que tienes en la pantalla? _____

Comenta con tus compañeros estas condiciones.

4. Intenten construir el cuadrilátero ABCD tomando en cuenta lo que han observado hasta ahora. Observen lo que logran, muevan la construcción. Después de un rato pónganse de acuerdo para contestar lo siguiente:

b) ¿Lograron construir el cuadrilátero ABCD? _____

c) Si la respuesta anterior fue "sí", ¿cómo pueden estar seguros de que EFGH es **realmente** el *cuadrilátero de los puntos medios* del cuadrilátero ABCD que acaban de hacer? _____

d) Si la respuesta del inciso *a)* fue "no", ¿por qué no pudieron?, ¿les falta alguna condición, alguna propiedad o es imposible?, ¿por qué? _____

5. Si necesitan volver a intentarlo, ¡háganlo!

6. Escriban los pasos que realizaron para hacer la construcción y justifíquenlos de acuerdo a lo que han estado observando en clase.

Comenta tus observaciones, resultados y el procedimiento realizado con tus compañeros.

5.2.3. El papel del docente

En estas actividades que se proponen el profesor juega un papel central, pues pareciera que con proporcionarles las hojas de trabajo a los alumnos y dar algunas indicaciones menores se acaba su labor, lo cual es una percepción simplista y alejada de la realidad. El profesor no sólo lleva a cabo tales acciones, sino que dirige el trabajo teniendo en mente la meta final de las actividades: la producción de justificaciones geométricas de las observaciones realizadas.

Al inicio se les debe dejar a los alumnos que exploren las situaciones propuestas siguiendo las indicaciones de las actividades, ocasionalmente se les puede proporcionar información u orientación respecto al uso del software, pero también sobre las posibilidades existentes en cuanto a las posibles configuraciones o propiedades geométricas importantes. Así el papel del profesor se va configurando en la dirección de ser un promotor de la acción y experimentación de los alumnos, orientándolos para la observación, la experimentación y el descubrimiento.

Adicionalmente, es muy importante que existan los momentos en que se tienen que compartir los hallazgos entre los estudiantes, por lo que también juega un papel de coordinador en la exposición de justificaciones y observaciones entre ellos, promoviendo la sistematización de los conocimientos de los alumnos, de sus observaciones y de los argumentos proporcionados. Es al profesor a quien le toca determinar cuál es el momento idóneo para llevar a cabo este intercambio de ideas y, evidentemente, impulsarlo.

Este papel del profesor lo obliga, necesariamente, a considerar todas las posibilidades que están en juego, y no sólo en términos del componente técnico del micromundo (que, como ya se dijo, tiene implicaciones hasta en la percepción misma que se tiene del conocimiento) sino también en términos de los demás componentes del micromundo. Es por ello que la formación del profesor debe ser lo suficientemente amplia e interdisciplinaria (matemática, didáctica, técnica, etcétera) como para poder lidiar adecuadamente con las condiciones y dificultades que se le presenten.

Como comentario a final en este aspecto, al profesor también le toca determinar si los alumnos trabajarán de manera individual o en equipo, con base en las condiciones del grupo de alumnos (la cantidad de alumnos, sus conocimientos y habilidades previos, el grado de homogeneidad en sus conocimientos). Al respecto se puede recomendar el trabajo en parejas pues se ha visto en los trabajos de investigación que la aprehensión de las características del ambiente de Geometría Dinámica no es automática y algo que puede ayudar es precisamente la interacción entre alumnos, además de ser una herramientas útil para provocar reflexiones, confrontar ideas y articular pensamientos (ver Ursini, 1993; González y Larios, 1994; Olivero, 2003a; Larios, 2005d).

6. COMENTARIOS FINALES

Occorre trovare nuovi equilibri,
sulla base delle specificità del
vecchio e del nuovo.
VINICIO VILLANI

Some psychologies lay much stress on the learning of facts. The learning of structures, however, is a superior goal. Facts very often become outmoded; (…) in a structure facts have sense.
PIERRE MARIE VAN HIELE
[*Structure and insight,* viii]

Si bien este libro está dirigido hacia la reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática, a estas alturas el lector podrá darse cuenta que no es una cuestión trivial, sino compleja. Además, al proponer en el capítulo anterior algunas actividades dirigidas a la enseñanza de la demostración en la Geometría tomando en cuenta la herramienta computacional la situación se hace aún más compleja. Es por ello que en este capítulo no sólo se presentan algunos comentarios finales sobre la enseñanza de la demostración, sino también otros sobre aspectos que influyen en el proceso pero que están relacionados con los demás aspectos tratados en el capítulo anterior.

El capítulo se inicia con algunos comentarios referentes a los aspectos que influencian el aprendizaje de la demostración en el ámbito geométrico, incluida la parte relacionada con el software para Geometría Dinámica. En una sección intermedia los comentarios se dirigen a la reflexión sobre la enseñanza de la demostración en términos generales para terminar el capítulo con algunos señalamientos sobre repercusiones en la enseñanza de la Matemática en el nivel medio.

Quizá a un profesor le pudiera parecer que los siguientes comentarios son abrumadores o bien que entorpecen el proceso del aprendizaje y de la enseñanza, pero es importante señalarlos no sólo porque existen, sino porque el profesor en su labor diaria se encuentra con alumnos que enfrentan (explícita o implícitamente) a fenómenos que derivan en dificultades que tienen que ser sorteadas.

6.1. Sobre los aspectos geométricos

Inicialmente se abordarán en esta sección fenómenos cognitivos que aparecen al trabajar con construcciones geométricas y con la intervención del software para Geometría Dinámica. Como se ha mencionado, estos fenómenos no son triviales y no se les debe ignorar, pues diversas investigaciones han mostrado su presencia y la gran influencia en el proceso de aprendizaje de la Geometría (ver, por ejemplo, Parzysz, 1988; Laborde y Capponi, 1994; Hölzl, 1996; Hoyles y Jones, 1998; Mariotti y Maracci, 1999; Maracci, 2001a; Straesser, 2001; Arzarello et al., 2002; Pedemonte, 2002; Larios, 2003a, 2005d; Olivero, 2003b; Sánchez, 2003).

Estos fenómenos que son la rigidez geométrica, la preferencia en el manejo y la observación de algunas propiedades geométricas por encima de otras y las funciones que se le otorgan al arrastre dentro de los ambientes de Geometría Dinámica. En la parte final de la sección se han incluido algunos comentarios relevantes con respecto al proceso de realizar construcciones y re-construcciones propuesto en las actividades del capítulo.

6.1.1. Sobre la rigidez geométrica y los aspectos figurales

Al hablar de los aspectos figurales presentes en las afirmaciones de los alumnos me referiré en un primer momento a dos fenómenos principalmente: la rigidez geométrica y el uso de figuras en posición "estándar" o prototipo.[33] Estos dos fenómenos aparecen ligados entre sí y con otros como el uso de justificaciones empíricas y el uso del arrastre como herramienta externa.

La rigidez geométrica es un fenómeno relacionado con la visualización de las figuras geométricas que ocurre cuando existe una incapacidad del individuo para manejar mentalmente una figura geométrica cuando ésta no se encuentra en ciertas posiciones "estándares" o no pueden imaginar la figura cuando se mueve (bajo una traslación) o cuando cambia su forma, es decir, cuando sus lados cambian de posición o sus ángulos se modifican (ver, por ejemplo, Larios, 2003a).

Este fenómeno puede ser relacionado con los conflictos que aparecen entre los aspectos figurales y conceptuales de los objetos geométricos, así como con la necesidad que establece Maracci (2001a, 2001b) de que los alumnos buscan dibujos satisfactorios.

Algunos alumnos necesitan utilizar dibujos hechos en posiciones estándar para poder identificar las figuras geométricas y sus relaciones espaciales, para poder así trabajarlas, mientras que otros alumnos del nivel medio muestran una incapacidad de interpretar el "movimiento" de una figura o de un diagrama realizado en la pantalla de la computadora, es decir, de percibir la característica dinámica del software.

Por ejemplo, es muy común que los jóvenes en las últimas actividades de triángulos y de cuadriláteros propuestas en el capítulo anterior (páginas 87 y 97) construyan triángulos isósceles (si no equiláteros) y paralelogramos casi rectangulares (si no cuadrados) con una orientación cómoda, es decir, con alguno de sus lados horizontales, utilizando así una figura geométrica conocida, rígida y considerada como "correcta". Es una realidad innegable que la orientación es considerada por los alumnos como un atributo importante de la figura, aunque no aparece en las definiciones de los objetos geométricos que entran en juego durante las construcciones.

Relacionada con la percepción de las construcciones cuando se aplica la operación de *arrastre*, es frecuente que cuando se modifican las construcciones o las figuras por medio del arrastre de un elemento independiente se presente una incapacidad de algunos alumnos por visualizar todos los momentos intermedios de esta transformación y considerarlos como casos particulares de la figura o la construcción. En tales ocasiones los alumnos perciben algo que he llamado *arrastre inicio-fin* (Larios, 2003a, 2005d) y que Olivero (2003b:141) denomina *photo-dragging*, ya que sólo se logran considerar

[33] Especialmente las orientadas de manera horizontal-vertical respecto a la hoja de papel.

dos casos: la construcción hecha antes de la operación de modificación por arrastre y aquélla obtenida al terminar de mover el ratón; los casos intermedios parecen no ser considerados como otros casos posibles de la construcción, sino como diagramas intermedios que no tienen el mismo status geométrico que las construcciones inicial y final, posiblemente porque son provisionales, este fenómeno puede ser considerado como otra forma de rigidez geométrica, debido que la que hasta ahora se ha reportado en la literatura científica habla de la incapacidad para imaginar las figuras en movimiento en tanto que en este caso se trata de la incapacidad para a partir de la figura en movimiento poder imaginarla en cada punto intermedio como una figura determinada.

Así pues, en alumnos del nivel medio es común que exista una preponderancia de las observaciones basadas en los aspectos figurales de los alumnos que dificultan la identificación de las figuras y por tanto el trabajo de observación de propiedades geométricas. En efecto, el uso de figuras con formas o posiciones "estándares" limitan las opciones para la exploración de posibilidades y de la amplitud de las propiedades que se pueden observar. Este tipo de conducta hace que se pierda la posibilidad de explorar sobre posibles configuraciones de las construcciones geométricas restringiendo las posibilidades de observar libremente cuáles pueden ser las propiedades o condiciones necesarias para realizar actividades relacionadas con una construcción determinada.

Las tensiones que se generan entre los aspectos figurales y conceptuales dificultan el trabajo de observación e incluso lleva a cometer algunas inconsistencias. Un ejemplo evidente de esto es el ya mencionado respecto a que los alumnos no consideran a la orientación como una propiedad relevante en sus definiciones escritas de triángulos pero sí aparece reiteradamente cuando los dibujan.

Estos fenómenos muestran que, desde nuestro punto de vista, los conceptos figurales correspondientes no han sido alcanzados por los estudiantes, ya que el aspecto figural no es usado como recurso heurístico sino como recurso referencial, mientras que el aspecto conceptual en los estudiantes se ve restringido en su aplicación debido a que los alumnos no ven la necesidad de apoyarse en las propiedades geométricas en el desarrollo de sus tareas de construcción y explicación. De hecho no puede haber aún una fusión entre los aspectos conceptuales y figurales. Todo ello a pesar de la evidencia que muestra los diversos intentos de los alumnos por construir dibujos satisfactorios a la vista (en el sentido de Maracci, 2001a).

6.1.2. Sobre la preferencia en las propiedades

Un fenómeno muy cercano con la observación de propiedades relacionadas con los aspectos figurales, es el hecho de que para los estudiantes es común que a algunas propiedades se les atribuya una mayor preponderancia que a otras o que, incluso, algunas son consideradas y otras simplemente no. Como se dijo en los párrafos anteriores, es posible que los alumnos muestren un mejor manejo de propiedades si las figuras están visualmente orientadas en posición estándar o actividades derivadas de la medición y el cálculo. Es común, por ejemplo, que se use el tamaño de los segmentos (lados de los polígonos) como criterios de validación para justificar que una construcción esté bien hecha.

Esta preferencia indica la necesidad de que los alumnos deben tener "presente en la cabeza" la propiedad de paralelismo para poder "ver" relaciones de este tipo entre los elementos de las construcciones, en lugar de darle la preferencia a la medición y el cálculo (Duval, 1999c:153 y ss.). Hay propiedades más evidentes para los alumnos que "merecen" ser consideradas, mientras que otras no. En este sentido algunas propiedades o situaciones observadas sobre el tamaño de los objetos geométricos, su forma, el hecho de que dos o más rectas o circunferencias concurran, parecen tener mayor posibilidad de ser tenidas en cuenta y aprehendidas que otras menos evidentes visualmente como, en el caso de las actividades recién propuestas, el paralelismo.

6.1.3. Sobre las funciones otorgadas al arrastre

Como se mencionó previamente, el *arrastre* es una parte fundamental del ambiente de Geometría Dinámica ya que le permite al usuario un control teórico de los elementos de una construcción geométrica (o de la construcción en sí), por lo que afecta la apreciación de la Geometría y debido a que es el rasgo que más le otorga el carácter de dinámico al ambiente provoca fenómenos en la percepción que están relacionados no sólo con aspectos de rigidez geométrica, como se comentó anteriormente, sino también sobre su potencial uso como medio para validar una construcción. Es por ello que el uso del arrastre como herramienta se convierte en algo que debe preocupar al profesor y al investigador en Didáctica de la Matemática.

Como ya se comentó, de manera a priori se puede decir que esta función puede ser utilizada como medio para la exploración de diferentes construcciones geométricas, como medio para la retroalimentación de las acciones realizadas por el usuario, como mediador entre el conocimiento matemático y el usuario o bien como un medio para validar que una construcción está bien hecha, es decir, que cumple con las relaciones geométricas deseadas y que se le denomina *examen de arrastre*.

No obstante estas funciones y modalidades son útiles cuando las características del programa, incluyendo el arrastre, son utilizadas correctamente, es decir que estas opciones son internalizadas por el usuario y éste les otorga un significado coherente con el que les fue otorgado originalmente por los diseñadores del software, que a su vez es coherentemente matemático. Para que esta internalización se lleve a cabo se perfila como antecedente el hecho de que, para el usuario, los atributos figurales de la representación logren un equilibrio con los conceptuales. Los alumnos necesitan utilizar las opciones y el arrastre como herramientas internas y no como herramientas externas en el sentido de Vygotski (1979).

En términos generales los alumnos del nivel medio lo utilizan como (Larios, 2005d):

- Un medio para explorar y generar casos posibles de las construcciones realizadas.
- Un espacio para observar propiedades que resultan invariantes a pesar del cambio en la forma, lo cual está relacionado con el punto anterior pero que implica un desarrollo cognitivo mayor.
- Un medio para determinar si una construcción está bien realizada por medio del examen de arrastre.

- Una utilización como herramienta externa o física que proporciona la posibilidad de dibujar "a mano alzada" una construcción o "acomodar" sus elementos para que el resultado en la pantalla visualmente cumpla con los requisitos pedidos en la tarea llevada a cabo.

Olivero (2003b) y otros autores italianos, al identificar varias modalidades en que sus alumnos utilizaron el arrastre en Cabri para resolver problemas geométricos, consideran al *examen de arrastre* como la más compleja cuando se utiliza. Idealmente los alumnos deberían utilizar el arrastre como medio de validación de que una construcción está bien (aplicar el examen de arrastre), sin embargo ello no ocurre siempre y, como se mostró en el capítulo anterior, recurren a validaciones externas o empíricas que están fuertemente vinculadas con una preponderancia de los aspectos figurales y una falta de desarrollo cognitivo que permita una diferenciación entre *figura* y *dibujo*, pues sólo se consideran la existencia de éstos últimos en la pantalla de la computadora. Este uso como herramienta externa de acomodo tiene consecuencias negativas en los primeros tres puntos enlistados, ya que de hecho simplemente se amplia el numero de recursos empíricos en disposición del estudiante.

En primer lugar, si el arrastre se utiliza como "acomodo" de los elementos de la construcción es muy probable que el dibujo obtenido produzca resultados inútiles, resultados que tenga imprecisiones o resultados inesperados que pueden no estar relacionado con la tarea solicitada. En segundo lugar, no se alcanza la aprehensión plena del carácter dinámico del software que permitiría finalmente avanzar hacia un desarrollo cognitivo que permita establecer la diferencia entre *dibujo* y *figura*, así como la posibilidad de observar propiedades invariantes en las construcciones.

No obstante, es posible que los alumnos recurran a esta práctica no porque consideren que es la única manera de realizar las construcciones, sino porque no pueden construirla utilizando propiedades geométricas (ya que no las identifican) y así este proceder se convierte para ellos en la única manera que tienen para terminar el trabajo solicitado por el profesor.

A pesar de esto último, el uso del *arrastre* como un medio para "arreglar" la construcción permite que la potencialidad dinámica del software se pierda en la búsqueda de dibujos que les convenzan a los alumnos pero sin el uso de diagramas dinámicos que se acerquen a la noción de *figura*.

6.1.4. Sobre las construcciones y re-construcciones

En el micromundo propuesto en el capítulo 5 se le pide a los alumnos que hagan construcciones a partir de polígonos dados, observen sus propiedades geométricas que los relacionan (en particular el paralelismo entre segmentos construidos) para después pedirles que utilicen tales propiedades para re-construir los polígonos originales a partir de aquéllos que se obtenían de las construcciones. Es decir, se les pide que desarrollen procedimientos y realicen construcciones recíprocas a las originales.

Hay que señalar que es muy común que en este nivel, a lo largo de este proceso propuesto, los alumnos echen mano de las propiedades que pudieron ver, como son la longitud y la orientación de los segmentos y de los polígonos, y pongan más énfasis en

el uso de los aspectos figurales de los objetos involucrados. No obstante, también es posible que aparezcan conductas de previsión, ya que algunos alumnos pueden anticipar cuál debe ser la forma del polígono a re-construir a partir de sus observaciones (visuales) realizadas en las actividades anteriores y así coloquen el polígono *de los puntos medios* inicial (en las actividades de reconstrucción *T3* y *C4*, en las páginas 87 y 97, respectivamente) en la posición adecuada, o bien recurran al arrastre para acomodar los elementos del polígono solicitado sin que necesariamente medie una relación geométrica entre el construido inicialmente (el *de los puntos medios*) y el obtenido al final de la actividad.

6.2. Sobre la formulación de justificaciones y la construcción de demostraciones

¿Existe en el paso de la argumentación a la demostración una ruptura cognitiva o es un proceso continuo? Esta es la pregunta principal que se hace Duval para sus investigaciones. En el capítulo 4 se han presentado cuatro posturas, dos de las cuales se polarizan hacia una u otra de las posibilidades. Sin embargo, en las cuatro secciones se han presentado conclusiones, observaciones y análisis de investigadores en Didáctica de la Matemática que, en menor o mayor grado, aceptan algo: sí existe el paso de la argumentación a la demostración; pero también hay algo que se acepta: dicho paso no está garantizado, y mucho menos si se intenta llevar a cabo a través de actividades que dejen en completa libertad (o casi completa libertad) a los alumnos. En este pretendido paso de la argumentación a la demostración las conjeturas juegan un papel preponderante, ya que sin importar cual de las dos tesis (de ruptura estructural/epistemológica o continuidad cognitiva, como se comentó en la última parte de dicho capítulo) o las posturas más complejas sea considerada, se observa la necesidad de que existe la conjetura en la mente del alumno para poder llevar a cabo una sistematización o demostración de ésta, ya sea a través de un convencimiento intuitivo de la misma, de una argumentación o de una exploración.

Otros elementos están involucrados en este paso, como son el uso de las construcciones lingüísticas y el contrato didáctico. Las relaciones que se establecen entre los diversos elementos son complejas y, hasta cierto punto, determinadas por el contexto social y el entorno de los alumnos.

George Polya considera que estos patrones de razonamientos demostrativos y heurísticos son diferentes y tienen diferentes tareas, pues mientras que el primero definitivo, final y "maquinal", el segundo resulta vago, provisional y, definitivamente, "humano". Sin embargo, advierte también que, mientras una máquina sería capaz entonces de realizar un razonamiento demostrativo, no podría hacer lo mismo con uno heurístico; y el desarrollo del conocimiento matemático queda en este último aspecto.

Este autor opina también que un razonamiento u otro le proporcionan una validez a una conjetura. La diferencia que expone no es en sí la conjetura, sino el procedimiento por medio del cual puede ser validada: ya sea por medio de un razonamiento demostrativo o por medio de un razonamiento inferencial.

Entonces las conjeturas se convierten en algo esencial porque es la afirmación que va a ser verificada. Es el objeto que se maneja cuando se realiza una argumentación o una demostración. Es el punto central de un proceso de validación o argumentación. "El proceso de producción de conjeturas es determinante para introducir a los alumnos a la argumentación" (Mariotti, 1998), ya que como otras investigaciones hay demostrado una y otra vez, la deducción no es usado como natural instrumento de inferencia (Larios, 2005d).

Y ya que las *conjeturas* y los *teoremas* son afirmaciones, entonces se puede considerar que están al mismo nivel semiótico, es decir, en ambos casos se tienen expresiones lingüísticas donde las relaciones entre los elementos que los conforman son iguales: ambas son afirmaciones que pueden tener un valor epistémico y un estatuto teórico. En ambos casos se realiza una validación de enunciados. Se sabe que una demostración es el *proceso de validación* científico (es decir, matemático) de un teorema, mientras que las conjeturas tienen otras formas de validación para el individuo. Sin embargo, y aun estando al mismo nivel ambas afirmaciones, sus procesos de validación tienen caracteres semióticos distintos, pues mientras que para el caso de las conjeturas estos procesos están relacionados con aspectos semánticos, para el caso de los teoremas se tiene más bien una relación sintáctica. En otras palabras, diferencias de los aspectos semánticos y sintácticos no se presentan en las afirmaciones en sí, pues el enunciado de una conjetura puede ser tan sintáctico como el de un teorema, sino que estas características se encuentran relacionadas directamente con sus métodos de validación correspondientes.

Lo anterior recuerda al trabajo de Duval (1999a) en que expone dos puntos que según él, son característicos del funcionamiento cognitivo necesario en todas las actividades matemáticas:

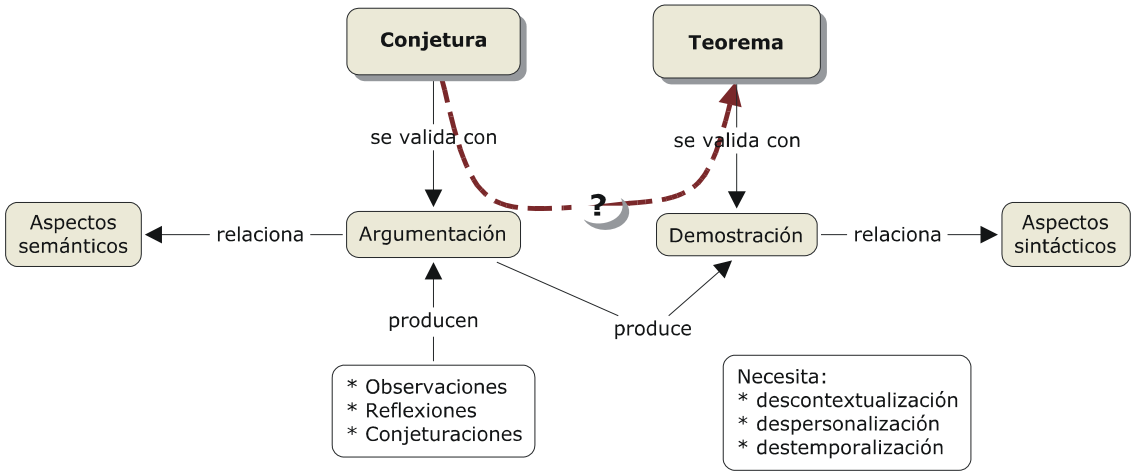
1. Un sujeto no puede comprender una actividad matemática sin comenzar a apropiarse de los modelos de funcionamiento propios de algunos de los registros de representación semiótica puestos en movimiento.
2. Esta apropiación está ligada al desarrollo por parte del sujeto de una coordinación entre estos diferentes registros.

Por otro lado, la validez de una conjetura está basada en las argumentaciones que la sustentan, pues dado que la argumentación se refiere a la acción de proporcionar razones a favor o en contra de una determinada tesis, si dichas razones son pertinentes y tienen la suficiente fuerza, entonces la conjetura tiene validez. No obstante, es importante mencionar que dicha validez puede ser transitoria, pues al sostenerse en las argumentaciones, que pueden incluir reflexiones y la aportación de ejemplos particulares, no existe la garantía de que la pertinencia, es decir la no-contradicción con las teorías ya establecidas, permanezca para siempre: en el momento en que por medio de una demostración o de la construcción de un contraejemplo se muestre que dicha "coherencia" no existe, las argumentaciones que sustentan a la conjetura pierden su fuerza y su pertinencia, "rompiéndose" la conjetura y siendo eliminada.

Una observación importante antes de continuar es que dicha validez de la conjetura en realidad tiene un alto grado de convicción intuitiva por parte del individuo, como lo

menciona Fischbein, y no una convicción formal, es decir, al buscarla el individuo realiza verificaciones (Polya, por ejemplo, utiliza este término más que el otro), se convence de que la conjetura es "verdadera", aunque en realidad se convence de que "puede ser verdadera". Aquí, por tanto, se está abusando del término "validez", pero se puede considerar que, individualmente, resulta significativo decir que se valida una conjetura a través de observaciones inferenciales que la verifican.

Proponemos, por tanto, el siguiente esquema:



Éste se refiere a que las conjeturas y los teoremas, siendo ambas afirmaciones, se encuentran al mismo nivel. Cada una de éstas tiene su propio método de "validación" y cada una mantiene relaciones entre sus elementos aspectos semánticos o sintácticos.

En este esquema la línea gruesa y punteada indica el flujo del paso que realiza el individuo. La tesis de la *unidad cognitiva de teoremas* es coherente con este esquema, pues la conjetura, producto de una exploración, es aceptada o rechazada (es decir, se verifica, se "valida" individualmente) a través de argumentos y observaciones, para después realizar la construcción de la demostración. Cuando este último paso ha sido realizado, entonces la afirmación que inicialmente era una conjetura se ha convertido en un teorema.

Este proceso no es lineal, pues si se ha de modificar la conjetura, entonces se reinicia el proceso: se explora la nueva conjetura y sus posibilidades, se observan casos y se exploran argumentos a fin de determinar si la conjetura es la "correcta". Esto quiere decir que eventualmente la afirmación de la conjetura podría ser la misma que la afirmación del teorema. En el esquema están representados de manera separada por su estatuto teórico, más no por su representación lingüística.

Nuevamente, el considerar la presencia de la formulación de una conjetura antes de construir su demostración es un proceso que debe ser **inducido** por el docente, a través de actividades y estrategias adecuadas, inmersos todos los actores en un contexto educativo también adecuado. De otra manera, como se ha dicho reiteradamente, no existe la garantía de dicho paso.

Otro aspecto a tomar en cuenta es que al considerar esta dicotomía semántico-sintáctico en los procesos de validación de las conjeturas y los teoremas, hace necesario

también el paso lingüístico por parte de los alumnos de su lenguaje natural a otro más estructurado, a un lenguaje artificial como es el utilizado en la Matemática. Para realizar este paso no es suficiente conocer los signos y la sintaxis de este lenguaje artificial, sino que es necesario también que el alumno identifique la parte semántica del mismo, la cual involucra directamente a la formación de conceptos. Así pues, resulta necesario para pasar de una argumentación, que es semántica, a una demostración, que es básicamente sintáctica, conocer el aspecto semántico del lenguaje formal, es decir, las nociones a los que hacen referencia los símbolos utilizados.

Además, considerando que una de las funciones de la demostración es la de ser un medio para comunicar ideas matemáticas, entonces se hace necesario que tales ideas sean comunicables, es decir, que sean comprendidas por quienes se involucran en este proceso de comunicación, en este caso los alumnos.

Por otro lado, es muy común que durante la construcción de las demostraciones los alumnos presenten justificaciones basadas en muchos casos en la evidencia empírica y que además hacen referencia a los instrumentos utilizados (especialmente si éstos son computacionales). Esta manera de justificar particularmente en el área de la Geometría está apoyada en la información visual y procedural que obtienen a través del manejo de las herramientas disponibles, la cual está estrechamente vinculada con aspectos figurales y para el caso del uso de software para Geometría Dinámica con el uso del arrastre como una herramienta externa.

Dentro de este tipo de justificaciones existen aquellas que proporcionan información extra e inútil en términos de las propiedades geométricas necesarias para realizar una construcción y aquellas que utilizan recursos incorrectos, la medición, como un medio de validación de las construcciones. También es frecuente que los alumnos utilicen estructuras discursivas, como las que menciona Raymond Duval en sus trabajos (ver págs. 43 y ss.), proporcionando así una descripción de los objetos en lugar de proporcionar una descripción de la consecuencia geométrica del hecho afirmado.

Estas conductas están ampliamente vinculadas con el hecho de considerar algunas propiedades más relevantes que otras (o incluso visualizarlas unas sí y otras no). Se ha visto en las investigaciones (Larios, 2005d) que los alumnos que pueden organizar la información deductivamente, no sin errores, a fin de justificar sus construcciones y los procedimientos, son quienes observan las propiedades geométricas adecuadas para llevar tal tarea a cabo respetando las restricciones conceptuales de los objetos, si bien manteniendo las referencias a los aspectos figurales. Además, los alumnos no tienen la costumbre de justificar apoyándose en las propiedades observadas, es decir, no hay un razonamiento organizado sobre las propiedades de las figuras que les permita eventualmente construir una deducción, sólo cuentan con la información visual que tienen y que, finalmente, el software para Geometría Dinámica proporciona de manera abundante.

Algunos de estos aspectos se tratarán más a fondo a continuación.

6.3. Sobre las repercusiones en la enseñanza de la Matemática

En las dos secciones anteriores aparecen comentarios sobre el aprendizaje de la construcción de la demostración y de justificaciones deductivas en el nivel medio, además de otras referidas a situaciones relacionadas. No obstante, estos comentarios son apenas un paso más en el camino, pues la problemática relacionada está lejos de ser resuelta.

Por ejemplo es necesaria la investigación sobre las conexiones, las analogías y las diferencias entre los procedimientos de exploración dinámica de problemas durante la producción de conjeturas y, durante el proceso de construcción de la demostración, los procedimientos para la exploración dinámica de las situaciones determinadas por las hipótesis. Asimismo, investigar la naturaleza de estos procedimientos de exploración, tanto los de la etapa de producción de conjeturas, como los de la etapa de construcción de la demostración.

Incluso los investigadores italianos (ver la sección 4.4) no están seguros de que hayan establecido aún todas las condiciones necesarias que están involucradas en sus experimentos, incluyendo las habilidades que les son necesarias para los estudiantes:

> "No somos aún capaces de establecer si todas las condiciones que distinguimos son realmente necesarias y suficientes para la implementación extensa de los procesos que registramos en nuestro experimento de enseñanza" (Boero et al., 1996:118).

Es decir, la profundización en el estudio del paso de la argumentación a la demostración es un avance indispensable, a fin de determinar el carácter de dicho paso: si existe una continuidad cognitiva o una ruptura. Si alguna de estas situaciones se da en algunos campos de la Matemática y en otros no; si se dan de acuerdo al enfoque de aproximación a la demostración, a la posición que ocupa la conjetura en el proceso. Finalmente, si existiese alguna clase de ruptura, independientemente de que ocurriese sólo en algunas de las áreas de la Matemática o según la aproximación didáctica, entonces sería interesante ver qué tan grande podría ser dicha ruptura y si depende de aspectos como los recién mencionados.

Considerando el carácter semántico de la argumentación y la relación que tiene ésta con el desarrollo de la demostración, se puede pensar en la necesidad de estudiar las estructuras lingüísticas involucradas en la argumentación, lo cual no sólo interesaría a los docentes de Matemática, sino también a los del área de conocimiento del lenguaje. Ésto lleva a pensar en el hecho de que los alumnos podrían interpretar, plantear o resolver "correctamente" problemas planteados en forma texto sólo hasta que sean capaces de superar sus dificultades de interpretación de su lenguaje materna. Y entonces se podría esperar que la capacidad del individuo para argumentar, y para expresar verbalmente sus conjeturas, estaría limitada por sus capacidades (o carencia de capacidades) lingüísticas y la amplitud de su vocabulario.

El párrafo anterior, quiérase o no, incide directamente en la función específica de la demostración como medio de comunicación, y entonces sería interesante investigar hasta qué punto realmente cumple con dicha función y bajo qué condiciones.

Todo esto, además, inmerso en el hecho innegable que existen fenómenos como es la transposición didáctica, en cuyo caso se tiene como consecuencia que no es posible aspirar a que la generalidad de los alumnos del nivel medio desarrollen demostraciones (en el sentido de Balacheff) dado su nivel de desarrollo cognitivo (ver, por ejemplo, lo que reporta Acuña, 1996). Entonces el profesor debe centrar su atención en la búsqueda del desarrollo del razonamiento y la obtención de pruebas (también en el sentido de Balacheff) a un nivel **adecuado** de acuerdo al nivel de desarrollo cognitivo de sus estudiantes y de la institución escolar, es decir, identificar las características de la institución (en el sentido de Godino) donde se desempeña y así determinar adecuadamente las características de las demostraciones que desarrollen sus alumnos. Es interesante, al respecto, las palabras de Maurice Fréchet:

> "El método de exposición *a priori* es el más rápido; el segundo es el más convincente e instructivo (...), que consiste en desprender poco a poco regularidades, permanencias aproximadas que verificamos en torno nuestro en una multitud de fenómenos diversos; regularidades y permanencias cada vez más generales (...), [que] constituye la 'síntesis inductiva'. Aun cuando se emplee el primero de estos métodos, se debería siempre recordar que sólo ha sido posible por el segundo." (1958:26-27)

Adicionalmente se tiene la presencia de la tecnología, pues en el caso de la Geometría se tiene que el software para Geometría Dinámica ofrece oportunidades para explorar situaciones geométricas bajo un ambiente que permite llevar a cabo indagaciones que de otra manera podrían ser muy restrictivas y que sólo están al alcance de aquellos que ya tienen un entrenamiento especial (los matemáticos, por ejemplo) o bien que tienen una mayor capacidad de imaginación espacial que los demás, ya que permite llevar a cabo de una manera controlada y física por medio del ratón la transformación de construcciones respetando las relaciones geométricas y proporcionando una respuesta visual por medio de la pantalla de la computadora. Mas, por otro lado, también puede generar otras problemáticas educativas que tanto pueden ser comunes con el uso de la tecnología de papel y lápiz como pueden estar ligadas con la herramienta misma que es la computadora.

La investigación en el área de mostrado que los alumnos no están acostumbrados a observar algunas propiedades y sí, en cambio, les otorgan una mayor relevancia a otras que visualmente son más accesibles; por ejemplo parecen "preferir" a la medición o a la concurrencia de rectas por encima de los lugares geométricos desconocidos o el paralelismo entre segmentos. Este hecho de una preferencia en las propiedades consideradas tiene como repercusión la posible existencia de una jerarquía en las propiedades geométricas en términos de visualización y de aprehensión. En esta posible jerarquía podrían estar hacia un extremo la percepción de las formas o propiedades como la concurrencia de curvas, la congruencia de segmentos (en términos de sus longitudes) y hacia el otro extremo propiedades menos favorecidas como el paralelismo de rectas y segmentos, la colinealidad de puntos y las transformaciones. En estos casos

se hace necesario el conocimiento del profesor al respecto y una intervención planeada y conciente que haga hincapié en tales propiedades.

Por otro lado, el uso del arrastre como una herramienta externa que sirve para "acomodar a mano alzada" las construcciones podría producir la percepción en los alumnos que el software es un medio de ayuda para el diseño, más que para el aprendizaje. Si no se internaliza la operación de arrastre y las opciones del programa los dibujos construidos no sólo tienen la misma potencialidad dinámica que los hechos con papel y lápiz, sino que incluso es una manera de hacerlos mucho más fácil. Por ejemplo no se tienen que cuidar detalles como la colocación de escuadras o la apertura de un compás, sino únicamente hacer el dibujo y luego acomodarlo utilizando la visión para hacerlo coincidir y una sola herramienta física: el ratón. El producir construcciones de esa manera no sólo lleva a observaciones inútiles o erróneas, lo cual lleva a no alcanzar los objetivos de aprendizaje que se hayan planteado en el aula, sino a generar una percepción equivocada de la utilidad del software.

Todo lo anterior es sin considerar los problemas en la percepción generados por la misma arquitectura del software. Por ejemplo Goldenberg y Cuoco (1998:353-354) exponen la siguiente situación: realizar la construcción de triángulo *ABC* (ver Figura 6-1) y de un punto *D* sobre el lado $\overline{AB}$, luego construir el segmento $\overline{DE}$ que sea paralelo al lado $\overline{AC}$ (y que *E* esté sobre $\overline{BC}$) y finalmente observar algunas razones entre las medidas de los segmentos que se han creado. Si se le pide al programa que calcule la razón $\frac{BD}{BE}$ y luego se arrastra el punto *D* a lo largo del lado del triángulo ocurre que la razón es constante, lo cual es un hecho matemático. Pero si se le pide al programa que calcule la razón $\frac{BD}{BA}$ y se arrastre el punto *A* de manera aleatoria (como si estuviese buscando otro caso del triángulo) ocurre que el resultado desplegado por el programa se mantiene constante, lo cual podría ser tomado erróneamente como un hecho matemático y no como una consecuencia de la arquitectura del software.

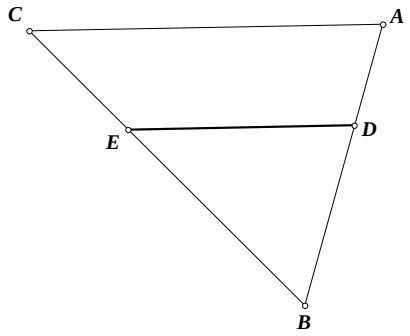
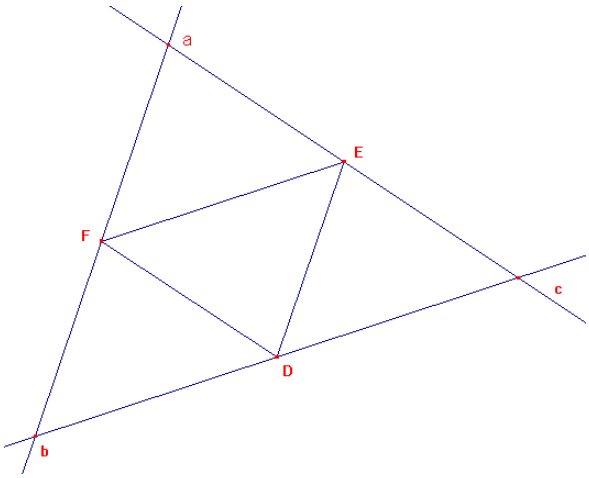
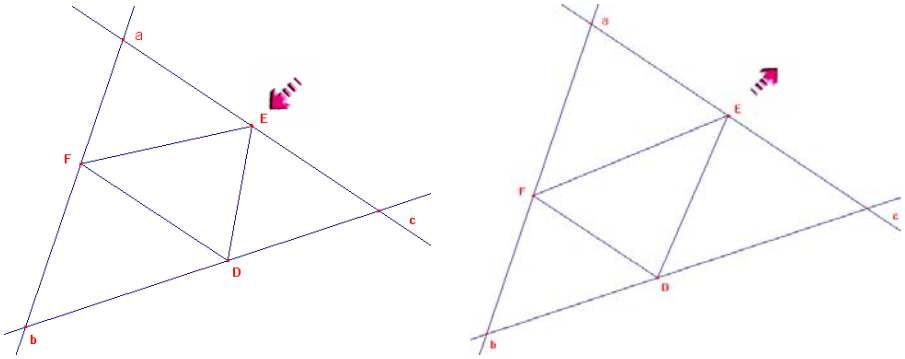


Figura 6-1. (Tomado de Goldenberg y Cuoco, 1998:353.)

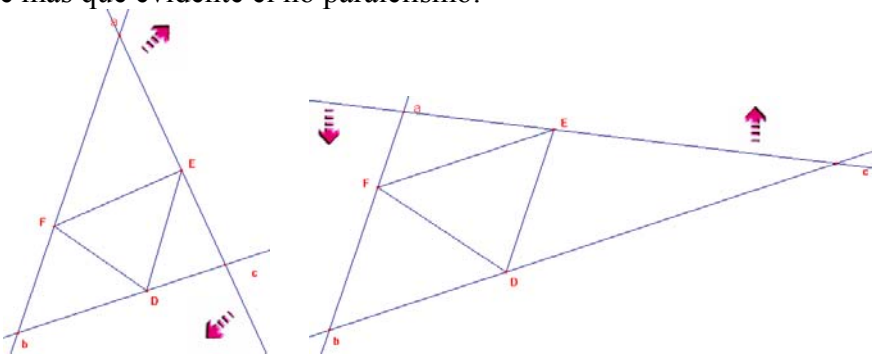
Si, por ejemplo, en la actividad *T3* de las propuestas en el capítulo 5 (pág. 87) se construyese el triángulo *ABC* "a mano alzada" y sin utilizar las opciones de rectas paralelas del software se podría obtener un dibujo como el siguiente:



Si bien a primera vista la construcción parece correcta, bajo el supuesto de que sólo se utiliza la opción recta (repito, sin paralelismo) para la construcción del triángulo grande, entonces al arrastrar un punto del triángulo interior (por ejemplo *E*) la recta que pasa por éste parece seguir siendo paralela al lado *DF*:



No obstante, este efecto ocurre por la arquitectura del software pudiendo provocar una percepción errónea. Si la recta se arrastra (sin mover el punto *E*) ocurre que gira y entonces se más que evidente el no paralelismo:



Es innegable, además, que el software puede proporcionar herramientas (lingüísticas o gráficas) a los alumnos para expresar las justificaciones o las respuestas, ya que es un mediador semiótico (Vygotski, 1979) que influye en la construcción del conocimiento, incluido el lenguaje y las maneras de argumentar. Este hecho hace que en ocasiones los alumnos hagan en sus observaciones o justificaciones referencias directas al software, a

sus comandos, a sus características o a su arquitectura), tanto de una manera explícita como implícita. Esto hace pensar en una posible necesidad de remarcar a los alumnos que en sus observaciones y justificaciones debe haber, precisamente, una distinción entre las características del software y las propiedades geométricas, lo que implica una "depuración" de los enunciados que puedan proponer.

Cabri-Géomètre o cualquier otro software para Geometría Dinámica, como herramienta de apoyo al aprendizaje y la enseñanza de la Geometría, no puede ser considerado por sí mismo como la manera para resolver los problemas educativos. Es decir, el software o la herramienta por sí misma no resuelve la problemática educativa de manera automática, sino que es su uso adecuado y planificado lo que permite alcanzar los objetivos de la enseñanza. El ejemplo de la producción de argumentos deductivos es relevante, pues si bien el programa es capaz de producir una gran cantidad de casos de alguna construcción y permitir la observación de propiedades invariantes, todo ello es evidencia empírica que el individuo puede tomar como cierta si acepta a la computadora y al software como autoridad y criterio de validación o convicción. Como se comentó en el capítulo 5, cualquier micromundo tiene como uno de sus componentes el pedagógico cuya función es la de darle sentido al componente técnico conforme a los objetivos de aprendizaje buscados. Volviendo al ejemplo de la producción de argumentos deductivos, los alumnos después de un momento de construcción y de observación deben separarse de la herramienta (en el sentido de no enfocar en ella su trabajo) y enfocar sus esfuerzos cognitivos en considerar la información que les fue presentada por la herramienta y sistematizarla para producir los argumentos deductivos necesarios, pues no es la computadora en sí la que los produce.

Como es evidente, el profesor tiene un arduo trabajo, pues no sólo debe conocer la disciplina que imparte, sino que debe tener en cuenta las consideraciones cognitivas de los alumnos y los posibles obstáculos a los que se enfrentará, para así diseñar situaciones y actividades que le permitan avanzar. Si además toma en cuenta herramientas informáticas, deberá considerar los aspectos técnicos y las implicaciones cognitivas necesarios como para que la misma herramienta no se convierta en un obstáculo más en su labor y sí en un medio para alcanzar su objetivo. Es así como el profesor se convierte en un actor principal del proceso educativo y su formación en una herramienta invaluable para cumplir su papel adecuadamente.

APÉNDICE. LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA: DEFINICIONES Y COMENTARIOS

Este apéndice ha sido incluido para presentar definiciones y opiniones que tienen algunos autores sobre la demostración matemática. Es pertinente la aclaración de que las aportaciones incluidas no están clasificadas, lo cual sería un intento harto difícil y quizá imposible en su totalidad.

a. Definiciones de la demostración

"*todas las demostraciones matemáticas deben ser deductivas*. Cada demostración es una cadena de inferencias deductivas, y cada una de éstas con sus correspondientes premisas y conclusiones."

MORRIS KLINE (s. XX).
Matemáticas para estudiantes de humanidades. FCE, México. 1992. Pág. 54.

"[Es,] *por un exacto y bien ordenado discurso, la conexión que hay entre la* hipótesis *y la* tesis*, empleando para esto otras proposiciones establecidas de antemano, hasta venir a caer de silogismo en silogismo en la dicha tesis como en una consecuencia necesaria.*"

IGNACIO BARTOLACHE (s. XVIII).
Lecciones matemáticas. Estado de Guanajuato, México. 1769/1990. Pág. 54.

"Por «prueba» (o «demostración») formal designaremos una serie finita de fórmulas, cada una de las cuales o es un axioma o puede ser derivada de otras fórmulas anteriores de la serie mediante las reglas de transformación."[34]

ERNEST NAGEL Y JAMES R. NEWMANN (s. XX).
El teorema de Gödel. Tecnos, España. 1979. Pág. 64.

"…*un experimento mental (o «cuasi-experimento») que sugiera una descomposición de la conjetura original en subconjeturas o lemas, incorporándola* así a un cuerpo de conocimiento tal vez muy lejano."

IMRE LAKATOS (s. XX).
Pruebas y refutaciones. Alianza Editorial, España. 1978. Pág. 25.

"Prueba es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. En la comunidad matemática sólo pueden ser aceptadas como prueba las explicaciones que adoptan una forma peculiar, son una serie de enunciados organizados según reglas determinadas, un enunciado se conoce verdadero o bien se

[34] *Fórmulas*: expresiones correctas del sistema axiomático donde se hace la demostración. *Reglas de transformación*: reglas de deducción que convierten de manera válida una fórmula en otra.

deduce de los que lo preceden a través de una regla de deducción tomada de un grupo de reglas bien definidas, llamamos demostración a estas pruebas."

NICOLAS BALACHEFF (s. XX).
"Processus de preuve et situations de validation", en revista *Educational Studies*, 18, pág. 148. 1987.

"La demostración consiste principalmente en la producción y observación de hechos que confirmarán la petición expresa en la afirmación respectiva. (…) Con referencia a la matemática, el método de demostración es diferente: la afirmación que consideramos que debe ser la conclusión necesaria y lógica de ciertas otras afirmaciones precedentes aceptadas."

EFRAIM FISCHBEIN (s. XX).
"Intuition and proof", en revista *For the Learning of Mathematics*, 3(2), pág. 18. 1983.

Clasificación de algunos tipos de demostraciones que se dan en las aulas:

"Demostración por el ejemplo: el autor explica la demostración para n=2 y dice que contiene casi todas las ideas de la demostración general.

"Demostración por intimidación: 'es trivial'.

"Demostración por autoridad establecida: 'vi a Karp en el ascensor y dice que…'

"Demostración por notación engorrosa: facilitada si se usan, por lo menos, cuatro alfabetos y símbolos especiales.

"Demostración por desviación semántica: se cambian algunas definiciones incómodas para llegar al resultado final.

"Demostración por agotamiento: en este caso, es útil tener un ejemplar o dos de una revista que haya mencionado la demostración."

DAVIS Y HERSH (s. XX).
Descartes' Dream.

"La 'demostración matemática' tiene las siguientes características:
– Se sabe ya la conclusión a la que se quiere llegar.
– Inducción y deducción son inseparables en matemáticas.
– Es un concepto relativo que varía con el tiempo."

MARIANO PERERO (s. XX).
Historia e historias de matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 1994. Pág. 102.

"Lo que constituye una 'demostración' varía de una cultura a otra y de una época a otra."

RAYMOND WILDER (s.XX).
Historia e historias de matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 1994. Pág. 102.

"Los matemáticos de hoy afirman que una demostración no es otra cosa sino lo que los matemáticos aceptan como demostración."

FRANÇOIS PLUVINAGE (s. XX).
Diferentes formas de razonamiento matemático. En: **Hitt E., F.** *Investigaciones en matemática educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 1996. Pág. 77.

"Si *p* es una proposición en este sistema [axiomático], una demostración de *p* consiste de una sucesión de proposiciones, cada una de las cuales es, o bien un axioma, o bien una consecuencia lógica de ciertas proposiciones *precedentes* en la lista, de tal manera que *p* es la última de ellas."

IAN STEWART (s. XX).
Conceptos de matemática moderna. Alianza Editorial, España. 1975. Págs. 142-143.

"Sólo los matemáticos han podido encontrar algunas demostraciones, es decir, algunas razones ciertas y evidentes."

RENATO DES CARTES (s. XVII).
Œuvres. Editado por Ch. Adam y P. Tannery, Francia. 1897-1913. Tomo 6, pág. 19.

"**Axioma** es una propiedad evidente por sí misma.

"**Teorema** es una verdad que se hace evidente por medio de un razonamiento llamado **demostración**."

ADRIEN-MARIE LEGENDRE (s. XVIII).
Eléments de géométrie. Pág. 4.

"La idea clásica de una demostración matemática consiste en partir de una serie de axiomas o afirmaciones que pueden considerarse ciertos o que por evidencia propia lo son. Después, con una argumentación lógica y progresiva, se puede llegar a una conclusión. Si los axiomas son correctos y la lógica es impecable, la conclusión final es innegable. Esta conclusión constituye un teorema. (…) La diferencia entre las pruebas científicas y las matemáticas es a la vez sutil y profunda y resulta crucial para poder comprender la obra de todo matemático (…). La prueba científica es tornadiza y chapucera sin remedio. Por el contrario, la demostración matemática es absoluta y libre de dudas."

SIMON SINGH (s. XX).
El enigma de Fermat. Editorial Planeta, España. 1998. Pp. 39-41.

"— En el fondo siempre te has limitado a *enseñarme* algo, pero no lo has *demostrado*.

"— Cierto —dijo el viejo maestro—. Tienes que disculparme, pero pasa una cosa: enseñar algo es fácil y divertido. Intuir algo tampoco está mal. Probar si es cierto lo que intuyes aún es mejor. Pero, por desgracia, todo eso no basta. Se trata de probarlo, incluso tú quieres ahora que te demuestren todo lo posible. (…)

"— Exageras. No puede ser tan difícil encontrar las pruebas. (…)

"— ¿Has intentado alguna vez —preguntó— atravesar un caudaloso río?

"— Ya me lo sé —gritó Robert—. ¡Me lo sé de sobra!

"— No puedes nadar, porque la corriente te arrastraría enseguida. Pero en medio del río hay unas piedras grandes. ¿Qué haces entonces?

"— Escojo unas piedras que estén tan cerca unas de otras como para poder saltar de una a otra. Si tengo suerte, cruzo. Si no, me quedo donde estaba.

"— Exactamente igual ocurre con las pruebas. Pero, como llevamos un par de siglos haciendo todos los intentos posibles para cruzar el río, no hace falta que empieces por el principio. Ya hay en el río innumerables piedras en las que puedes confiar. Han sido probadas millones de veces. No son resbaladizas, no ceden, así que

te garantizan un apoyo firme. Si tienes una idea nueva, una intuición, buscas a tu alrededor al piedra firme más cercana. Si puedes alcanzarla, vas saltando hasta llegar a la orilla. Si tienes cuidado, no te mojarás los pies.

"— Ajá —dijo Robert—. Pero ¿*dónde* está la orilla en los números o en los pentágonos o en los números saltarines? ¿Puedes decírmelo?

"— Buena pregunta —dijo el diablo de los números—. La orilla son unos cuantos principios, tan sencillos que no hay otros más sencillos. Cuando vas a parar a ellos, se acabó. Eso se considera una prueba."

HANS MAGNUS ENZENSBERGER (s. XX).
El diablo de los números. Ediciones Siruela, España. 1998. Pp. 212-214.

"Una *demostración* (*formal*) es una secuencia finita de una o más (ocurrencias de) fórmulas tal que cada fórmula de la secuencia es o un axioma o una consecuencia inmediata de fórmulas precedentes de la secuencia. Una demostración se dice ser una demostración *de* su última fórmula, y esta fórmula se decir que es (*formalmente*) *demostrable* o que es un *teorema* (*formal*)."

STEPHEN COLE KLEENE (EEUU, s.XX).
Introducción a la metamatemática. Editorial Tecnos, España. 1974. Pág. 83.

"Nuevamente las deducciones de los principios iniciales están divididos en **problemas** y **teoremas**, aquéllos incluyen la generación, división, substracción o adición de figuras, y generalmente los cambios que son realizados en ellas, los últimos exhiben los atributos esenciales de cada una."

PROCLO (s. V).
Citado en **Heath, Thomas L.** *Introducción a «The thirteen books of The Elements»*.
Dover Publications, Inc., EEUU. 1956. Volumen 1, pp. 124-125.

"Lo que llamamos prueba/demostración (*proof*) en matemáticas no es otra cosa que la comprobación (*testing*) de los productos de nuestra intuición."

RAYMOND WILDER (s. XX).
The nature of mathematical proof, en revista *American Mathematical Monthly*, 51.
1944. Pág. 319.

"Una prueba matemática es un guión simbólico e universal que le permite a uno distinguir claramente entre el hecho y la ficción, la verdad y lo falso."

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (s. XVII).
Citado en **Hanna, G.** "Some pedagogical aspects of proof", en *Interchange*,
21(1):6-13. 1990. Pág. 6.

"En matemáticas, 'prueba' tiene dos significados. El primer significado matemático, el significado 'práctico', es:

Un argumento que convence a jueces calificados.

El segundo significado matemático, el 'lógico', es:

Una secuencia de transformaciones de enunciados formales, realizados de acuerdo a las reglas del cálculo de predicado."

REUBEN HERSH (s. XX).
"Proving is convincing and explaining", en revista *Educational Studies in Mathematics*, 24:389-399. 1993. Pág. 391.

"Por 'demostración' nos referimos al proceso empleado por un individuo para remover o crear dudas acerca de la verdad de una observación."

GUERSON HAREL Y LARRY SOWDER (s. XX).
"Students' proof schemes" en **Schoenfeld, Kaput y Dubinsky**: *Research in colegiate mathematics education III*. AMS, EEUU. 1998. Pág. 241.

"Las pruebas son el camino del matemático para *desplegar la maquinaria matemática* para resolver problemas y para *justificar* que una solución propuesta a un problema de hecho una solución."

Y. RAV (s. XX).
"Why do we prove theorems", en revista *Philosophia Mathematica*, 7(3):5-41. Pág. 13. 1999.
Citado en **Hanna, G.** "Proof, explanation and exploration", en *Educational Sutides in Mathematics*, 44:5-23. 2000. Pág. 7.

"Probar es proporcionar argumentos lógicamente encadenados referentes a una teoría, pero al mismo tiempo probar es proporcionar una explicación que puede remover dudas acerca de la verdad de una afirmación."

MARIA ALESSANDRA MARIOTTI Y MIRKO MARACCI (s. XX).
"Conjecturing and proving in problem-solving situations" en **Zaslavsky**: *Proceedings of the 23rd Conference of the PME*. Israel. 1999. Vol. 3, pág. 266.

"Cuando la afirmación que expresa la conjetura es hecha válida en una teoría matemática, podemos decir que una prueba es producida. Esta prueba es una argumentación particular basada en una teoría matemática."

BETTINA PEDEMONTE (s. XX).
"Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics" en **van den Heuvel-Panhuizen**: *Proceedings of the 25th Conference of the PME*. Holanda. 2001. Vol. 4, pág. 34.

b. Comentarios sobre la demostración

En esta sección, a diferencia del anterior, no se presentan intentos de definir qué es la *demostración*, sino más bien comentarios variados acerca de su función, su origen, la manera de realizarla, su aprendizaje, etcétera. Ojalá y le resulten amenos y enriquecedores al lector.

"…La demostración formal nace como una respuesta a una demanda continua de justificación, una demanda que se remonta a Aristóteles y Euclides, a través de Frege y Leibniz. Ha habido siempre una necesidad de justificar nuevos resultados (…), no siempre en el sentido limitado de definir su verdad, sino más bien en la más amplia acepción de suministrar razones para su plausibilidad. La demostración ha sido y es una respuesta suficientemente útil a esta preocupación por la justificación."

GILA HANNA (s. XX).
"The ongoing value of proof", en **Puig y Gutiérrez**: *Proceedings of the 20th Conference of the PME*. España. 1996. Vol. 1, pág. 30.

"Hemos nombrado tres rasgos de las demostraciones: que son convincentes, revisables y formalizables. El primero es un rasgo centrado en la antropología de la matemática, el segundo es la epistemología de la matemática y el tercero es la lógica de la matemática. Los últimos dos son características profundas. Es debido a que las demostraciones son revisables y formalizables que son convincentes para las mentes racionales."

THOMAS TYMOCZKO (s. XX).
The new directions in the Philosophy of Mathematics. EEUU. 1966. Pág. 248.

"De las consideraciones precedentes, no deduzco que únicamente debemos aprender la aritmética y la geometría; trato solamente de hacer ver que los buscan el camino recto de la verdad, no deben ocuparse de lo que no ofrezca una certeza igual a la de las demostraciones de la aritmética y de la geometría."

RENATO DES CARTES (s. XVII).
Reglas para la dirección del espíritu. Editorial Porrúa, México. 1999. Regla II, pág. 98.

"¿La matemática se reduce a una ciencia deductiva? (...) Aunque se concibe con frecuencia al matemático como un científico que procede únicamente por deducción, no será sin embargo, difícil admitir que la intuición lo guía en la dirección a tomar. (...) En una concepción, la teoría deductiva es únicamente la parte central de las matemáticas; está precedida de una *síntesis inductiva* y luego de una etapa axiomática en que, de los resultados de esta síntesis inductiva se desprende el conjunto de definiciones y axiomas que servirán de punto de partida a la teoría deductiva. En fin, esta última irá seguida de un conjunto de verificaciones experimentales."

MAURICE FRÉCHET (s. XX).
Las matemáticas y lo concreto. UNAM, México. 1958. Págs. 21-23.

"Una prueba, especialmente para principiantes, podría necesitar ser motivada por las incertidumbres que permanecen sin la prueba, o por una necesidad de una explicación de por qué un fenómeno ocurre. La prueba de lo muy obvio probablemente se sentiría ritualista y vacía."

GOLDENBERG, CUOCO Y MARK (s. XX).
"A role for geometry in general education?", en **Lehrer y Chazan**: *Designing learning environment for developing understanding of geometry and space*. Hildale, NJ: Erlbaum. 1998.

"Pero la prueba puede hacer su mayor contribución en el salón de clase sólo cuando el profesor es capaz de usar pruebas que lleven a la comprensión."

GILA HANNA (s. XX).
"Proof, explanation and exploration", en revista *Educational Sutides in Mathematics*, 44:5-23. 2000. Pág. 7.

Para George Polya el propósito de los problemas por demostrar es:
"…Mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada".

GEORGE POLYA (s. XX).
Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas, México. 1969. Pág. 161.

Según Lev M. Fridman, los problemas que se reducen a una demostración tienen como requerimiento:

"…El convencimiento de la validez de cierta proposición, en el someter a prueba la veracidad de la proposición o explicar las causas de algún fenómeno."

LEV MOISIÉIEVICH FRIDMAN (s. XX).
Metodología para resolver problemas de matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 1995.

"Una demostración intuitiva permite comprender **por qué** un teorema debe ser cierto; la lógica proporciona una base firme para demostrar que **es** cierto."

IAN STEWART (s. XX).
Conceptos de matemática moderna. Alianza Editorial, España. 1975. Pág. 16.

Bibliografía

Acuña Soto, Claudia Margarita (1996). "Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza del razonamiento deductivo y de la demostración en el nivel medio superior". En **F. Hitt E.** (ed.), *Investigaciones en matemática educativa* (pp. 93-109). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

———— (s.f.). "Algo sobre puntos medios". México: Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas y Cinvestav.

Arsac, Gilbert (1988). "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3):247-280. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Arsac/Arsac88.html.]

Arzarello, Ferdinando; Olivero, Federica; Paola, Domingo; Robutti, Ornella (2002). "A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 34(3):66-72. [Existe una copia en http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm023a2.pdf.]

Arzarello, Ferdinando; Olivero, Federica; Robutti, Ornella; Paola, Domingo (1999). "Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva". *L'insegnamento della matemática e delle scienze integrate*, 22B:309-338. [Existe una copia en http://www.matemática.it/paola/Congetture%20e%20dimostrazioni%20finale.pdf.]

Bagni, Giorgio Tomaso (1996). *Storia della Matematica* (vol. II). Bolonia, Italia: Pitagora Editrice Bologna.

Balacheff, Nicolas (1982). "Preuve et demonstration en mathématiques au college". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3):261-304.

———— (1987). "Processus de preuve et situations de validation". *Educational Studies in Mathematics*, 18(2):146-176.

———— (1991a). "The benefits and limits of social interaction: The case of teaching mathematical proof". En **A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. van Dormolen** (eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Alemania: Kluwer Academic Publisher. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Balacheff/Balacheff91a.html.]

———— (1991b). "Treatment of refutations: aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics learning". En **E. von Glasersfeld** (ed.), *Radical constructivism in Mathematics Education* (pp. 89-110). Alemania: Kluwer Academic Publisher. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Balacheff/Balacheff91.html.]

———— (1999). "¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate". *Preuve*, 99 05/06. Obtenido el 28 de junio de 2006, desde http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/990506Theme/990506ThemeES.html.

———— (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas*. Colombia: Un Empresa Docente y Universidad de los Andes.

Barbi, Giovanni; Giannini, Anna (1997). "Il primo teorema di Euclide con CABRI". *Bolletino CabriRRSAE*, 11:2-3. IRRSAE-ER, Italia.

Barozzi, Giulio Cesare (1995). *Il ruolo dell'informatica nella didattica della matematica*. Conferencia presentada en el XV Congreso de la UMI, Padua, Italia.

Bartolache, José Ignacio (1769/1990). *Lecciones matemáticas*. Guanajuato, México: Gobierno del Estado de Guanajuato. (La edición original data de 1769.)

Boero, Paolo (1999). "Argumentación y demostración: Una relación compleja, productiva, e inevitable en las matemáticas en la educación matemática". *Preuve*, 99 07/08. Obtenido el 28

de junio de 2006, desde http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html.

Boero, Paolo; Chiappini, Giampaolo; Garuti, Rossella; Sibilla A. (1995). "Towards statements and proofs in elementary arithmetic: An exploratory study about the role of teachers and behavior of students". En **D. Carraher y L. Meira** (eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 129-136). Recife, Brasil. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero95.html.]

Boero, Paolo; Garuti, Rossella (1994). "Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements". En **J.P. da Ponte y J.F. Matos** (eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 96-97)**.** Lisboa, Portugal. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero94.html.]

Boero, Paolo; Garuti, Rossella; Lemut, Enrica; Mariotti, Maria Alessandra (1996). "Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems". En **A. Gutiérrez y L. Puig** (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 113-120). Valencia, España. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero96a.html.]

Boero, Paolo; Garuti, Rossella; Mariotti, Maria Alessandra (1996). "Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures". En **A Gutiérrez y L. Puig** (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 121-128). Valencia, España. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero96.html.]

Bourbaki, Nicolás (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. España: Alianza Editorial. (Trad. del francés: *Eléments d'histoire des mathématiques*. Hermann. 1969.)

Brousseau, Guy (1986). "Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2):33-115.

Chazan, Daniel (1993). "High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof". *Educational Studies in Mathematics*, 24(4):359-388.

Chevallard, Yves (2000). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editorial. (Trad. del francés: *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage. 1991.)

Chevallard, Yves; Bosch, Marianna; Gascón, Josep (1998). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. España: SEP-Cooperación Española.

Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro (2003). *Modelo educativo (documento preliminar)*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro. Obtenido el 2 de julio de 2006, desde http://www.cobaq.edu.mx/Comunidad%20Academica/Principal/MODELO%20EDUCATIVO%20doc.%20preliminar.htm.

Confrey, Jere (1990). "What constructivism implies for teaching". En **R.B. Davis, C.A. Maher y N. Noddings** (eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (pp. 107-122). EEUU: National Council of Teachers of Mathematics.

Copeland, B. Jack; Proudfoot, Diane (1999). "Alant Turing's forgotten ideas in computer science". *Scientific American*, 280(4):76-81. (Trad. cast.: *Investigación y Ciencia*, 273:14-19, 1999).

D'Amore, Bruno (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bolonia, Italia: Pitagora Editrice Bologna.

De Villiers, Michael (1993). "El papel y la función de la demostración en matemáticas". *Épsilon*, 26:15-30. [Existe una copia en http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofb.pdf.] (Trad. del inglés: "The role and function of proof in mathematics". *Pythagoras*, 24:17-24. 1990. [Existe una copia en http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofa.pdf.])

———— (1995). "An alternative introduction to proof in dynamic geometry". *Micromath*, 11(1):14-19.

———— (2000). "El fututo de la Geometría en la escuela secundaria". *Preuve*, 00 11/12. Obtenido el 28 de junio de 2006, desde http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/deVilliers/deVilliers98ES.pdf. (Trad. del inglés: "The future of secondary school geometry". Conferencia presentada en el evento "Geometry Imperfect", Universidad de Sudáfrica, Pretoria, Sudáfrica. 1996. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/deVilliers/deVilliers98/deVilliers98.html.])

Díaz-Barriga Arceo, Eugenio (2002). *Transparencia y opacidad de una noción matemática: objeto geométrico mediado por el entorno computacional Cabri-Géomètre, el caso del Principio de Cavalieri*. México: Cinvestav-DME. (Tesis de doctorado.)

Díaz-Barriga C., Alejandro; Larios O., Víctor; Padilla G., Alejandro; Bravo M., Alejandro; Meda G., Ana; Fernández V., Manuel (2002). *Aplicaciones de las Matemáticas y su Enseñanza en el Nivel Medio Superior (documento preliminar)*. México: Sociedad Matemática Mexicana.

Díaz-Barriga Casales, Alejandro; Larios Osorio, Víctor; et al. (2001). "Hacia las aplicaciones de las Matemáticas en la escuela media superior de México". En **J. E. Sagula y O. L. Isnardi** (eds.), *Memorias del III Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy, Argentina: UNLu.

Dirección General del Bachillerato (2004). *Matemáticas I. Programas de estudio*. México: Secretaría de Educación Pública (Subsecretaría de Educación Superior e Investigación Científica).

Dreyfus, Tommy (1994). "The role of cognitive tools in mathematics education". En **R. Biehler, R.W. Scholz, R. Straesser y B. Winkelmann** (eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp (201-211). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Duval, Raymond (1999a). "L'apprendimento in matematica richiede un funzionamento cognitivo specifico?" *La Matematica e la sua Didattica*, 1999(1):17-42.

———— (1999b). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Pitagora Editrice Bologna y Grupo Editorial Iberoamérica. (Trad. del francés: "Argumenter, demotrer, expliquer: continuité ou rupture cogntive?" *Petit X*, 31:37-61. 1992-1993.)

———— (1999c). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle y Peter Lang. (Trad. del francés: *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. 1995.)

Edwards, Laurie D. (1998). "Embodying mathematics and science: Microworlds as representations". *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1):53-78.

Fischbein, Efraim (1983). "Intuizione e dimostrazione". En **B. D'Amore** (coord.) (1992), *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (pp. 1-24). Bolonia, Italia: Pitagora Editrice. (Trad. del inglés: "Intuition and proof". *For the Learning of Mathematics*, 3(2):9-24. 1983)

———— (1989). "Modelli taciti e ragionamento matematico". En **B. D'Amore** (coord.) (1992), *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (pp. 25-38). Bolonia, Italia: Pitagora Editrice. (Trad. del ingles: "Tacit models and mathematical reasoning". *For the Learning of Mathematics*, 9(3):9-14. 1989.)

———— (1990). "Intuizione e proceso informativo nell'attività matematica". En **B. D'Amore** (coord.) (1992), *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (pp. 51-74).

Bolonia, Italia: Pitagora Editrice. (Trad. del ingle: "Intuition and information processing in mathematical activity". *International Journal of Science Education*, XIV(1). 31-51. 1990.)

———— (1993). "The theory of figural concepts". *Educational Studies in Mathematics*, 24:139-162.

———— (1998). *Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica*. Bolonia, Italia: Pitagora Editrice.

Fréchet, Maurice (1958). *Las matemáticas y lo concreto*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Fredericksen, N. (1984). "Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research*, 54:363-407.

Freudenthal, Hans (1988). "Problemas mayores de la educación matemática". En **A. López Y.** (coord.), *Problema de enseñanza de las matemáticas* (pp. 3-11). México: Universidad Nacional Autónoma de México y Editorial Porrúa.

Fridman, Lev Moisiéievich (1995). *Metodología para resolver problemas de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fritzler Happach, Wolfgang (1997). "Triángulos y cuadriláteros inscritos en un círculo. Una aplicación del software educativo 'Cabri Géomètre'". *Educación Matemática*, 9(2):116-136.

Furinghetti, Fulvia; Paola, Domingo (2003). "To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: A case study". En **N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox** (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 397-404). Honolulu, Hawaii. [Existe una copia en http://www.matemática.it/paola/RRFuringhetti.pdf.]

Garuti, Rossella; Boero, Paolo; Lemut, Enrica (1998). "Cognitive unity of theorems and difficulty of proof". En **A. Olivier y K. Newstead, K.** (eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 345-352). Stellenbosch, Sudáfrica. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Garuti/Garuti98.html.]

Godino, Juan Díaz; Batanero Bernabeu, Carmen (1994). "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3):325-355.

Godino, Juan Díaz; Recio, Ángel Martínez (1997). "Meaning of proofs in mathematics education". En **E. Pehkonen** (ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 313-320). Lahti, Finlandia. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Godino/Godino97.html y una traducción al castellano en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Godino/Godino97ES.html.]

Godino, Juan Díaz; Recio, Ángel Martínez (2001). "Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática". *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3):405-414.

Goldenberg, E. Paul; Cuoco, Albert A. (1998). "What is dynamic geometry?" En **R. Lehrer y D. Chazan** (eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-367). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Publishers.

González González, Noraísa; Larios Osorio, Víctor (1994). *Uso de la microcomputadora y del doblado de papel en la aplicación del modelo de van Hiele en la enseñanza de la Geometría euclidiana en el nivel medio básico*. Querétaro, México: ENEQ. (Tesis de licenciatura.)

Hanna, Gila (1989). *Rigorous proof in mathematics education*. Canadá: OISE Press.

———— (1996). "The ongoing value of proof". En **L. Puig y A. Gutiérrez** (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 21-34). Valencia, España: Universitat de València.

Harel, Guershon; Sowder, Larry (1998). "Students' proof schemes: Results from exploratory studies". En **A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky** (eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-282). EEUU: AMS.

Hersh, Reuben (1993). "Proving is convincing and explaining". *Educational Studies in Mathematics*, 24(4):389-399.

Hölzl, Reinhard (1995). "Between drawing and figure". En **R. Sutherland y J. Mason** (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 117-124). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

———— (1996). "How does 'dragging' affect the learning of geometry". *International Journal for Mathematical Learning*, 1(2):169-187.

Horgan, John (1993). "The death of proof". *Scientific American*, 269(4):74-82.

Hoyles, Celia (1998). "L'influenza del curriculum sull'approccio degli studenti alla dimostrazione". *La Matematica e la sua Didattica*, 1998(3):248-270. (Trad. del inglés del artículo aparecido en *For the Learning of Mathematics*, 17(1):7-15 (1997).)

Hoyles, Celia; Jones, Keith (1998). "Proof in dynamic geometry contexts". En **C. Mammana y V. Villani** (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hoyles, Celia; Noss, Richard (1987). "Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum". *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 18(4):581-595.

———— (1992). "A pedagogy for mathematical microworlds". *Educational Studies in Mathematics*, 23:31-57.

———— (2003). "Microworlds: the next generation". En **E. Filloy Y.** (coord.) *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 112-120). México: Cinvestav-FCE.

Kilpatrick, Jeremy (1987). "What constructivism might be in mathematics education". En **J. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran** (eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Canadá.

Kilpatrick, Jeremy; Gómez, Pedro; Rico, Luis (1995). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Kline, Morris (1992). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México: Fondo de Cultura Económica. (Trad. del inglés: *Mathematics for liberal arts*. Addison-Wesley Publishing, Co (1967.)

Laborde, Colette; Capponi, Bernard (1994). "Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1-2):165-210.

Lakatos, Imre (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. España: Alianza Editorial. (Trad. del inglés: *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press. 1976.)

Larios Osorio, Víctor (1998). "Constructivismo en tres patadas". *Gaceta COBAQ*, XV(132):10-16. [Publicado también en *Xixim*, 1(1). Obtenido el 2 de julio de 2006 desde http://www.uaq.mx/matematicas/redm/articulos.html?0101.]

———— (2000). *Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro. (Tesis de maestría.) [Existe una copia en http://www.geocities.com/discendi2/tm/tm.html.]

———— (2001). "Demostraciones y conjeturas en la escuela media". En **J. E. Sagula y O. L. Isnardi** (eds.), *Memorias del III Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy, Argentina: Universidad Nacional de Luján.

———— (2003a). "Geometrical rigidity: An obstacle in using dynamic geometry software in a geometry course". En **M. A. Mariotti** (ed.), *Proceedings of the Third Conference of the*

European Society for Research on Mathematics Education. Bellaria, Italia: Edizione Plus, Pisa University Press. [Existe una copia en http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7_LariosOsorio_cerme3.pdf.]

———— (2003b). "Si no demuestro… ¿enseño matemática?". *Educación Matemática*, 15(2):163-178.

———— (2005a). "Argumentation and geometric proof construction on a dynamic geometry environment". En **H. L. Chick y J. L. Vincent** (eds.), *Proceedings of 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pág. 31). Melbourne, Australia: Universidad de Melbourne.

———— (2005b). "La rigidez geométrica como obstáculo para el aprendizaje de la Geometría en un ambiente de Geometría Dinámica". En *Memorias del V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Porto, Portugal.

———— (2005c). "Un micromundo para el estudio de paralelismo con triángulos y cuadriláteros en la escuela secundaria". *Educación Matemática*, 17(3).

———— (2005d). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica*. México: Cinvestav-DME. (Tesis de doctorado.)

Maracci, Mirko (2001a). "Drawing in the problem solving process". En **J. Novotná** (ed.), *Proceedings of 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 478-488). Praga, República Checa: Charles University.

———— (2001b). "The formulation of a conjecture: the role of drawings". En **M. van den Heuvel-Panhuizen** (ed.) *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 335-342). Utrecht, Holanda.

Mariotti, Maria Alessandra (1995). "Images and concepts in geometrical reasoning". En **R. Sutherland y J. Mason** (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 97-116). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

———— (1997). "Justifying and Proving in Geometry: the mediation of a microworld". En **M. Hejny y J. Novotna** (eds.), *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (pp.21-26). Praga, República Checa: Prometheus Publishing House. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Mariotti/Mariotti97a/Mariotti97a.html.]

———— (1998). "La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein". *Preuve*, 98 11/12. Obtenido el 3 de julio de 2006, desde http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/981112Theme/981112ThemeES.html.

———— (2000). "Introduction to Proof: The mediation of a dynamic software environment". *Educational Studies in Mathematics*, 44:25-53.

———— (2002). "La preuve en mathématique". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 34(4):132-145. [Existe una copia en http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm024a5.pdf.]

Mariotti, Maria Alessandra; Bartolini Bussi, M.G.; Boero, Paolo; Franca Ferri, F.; Garuti, Rossella (1997). "Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition". En **E. Pehkonen** (ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 180-195). Lahti, Finlandia. [Existe una copia en http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Mariotti/Mariotti97.html.]

Mariotti, Maria Alessandra; Maracci, Mirko (1999). "Conjeturing and proving in problem-solving situation". En **O. Zaslavsky** (ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 265-272). Haifa, Isreal.

Mason, John; Burton, Leone; Stacey, Kaye (1987). *Thinking mathematically*. Nueva York, EEUU: Addison-Wesley.

Moise, Edwin E.; Downs, Floyd L. (1986). *Geometría moderna*. EEUU: Addison-Wesley Iberoamérica.

Moreno Armella, Luis Enrique. (1996). "La epistemología genética: una interpretación". *Educación Matemática*, 8(3):5-23.

Nagel, Ernest; Newmann, James R. (1979). *El teorema de Gödel*. España: Editorial Tecnos. (Trad. del inglés: *Gödel's proof*. New York University Press. 1958.)

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales». [Existe una copia en http://standards.nctm.org/previous/CurrEvStds/.]

———— (2000). *Principles and standards for school mathematics*. EEUU: NCTM. [Existe una copia en http://standards.nctm.org/.]

Noss, Richard (1999). *Nuevas culturas, nuevas* Numeracy. México: Pitagora Editrice Bologna y Grupo Editorial Ibearomérica.

Noss, Richard; Hoyles, Celia (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Olivero, Federica (2000). "Exploring, constructing, talking and writing during the proving process within a dynamic geometry environment: What continuity(ies)?". *ICME-9 (TSG-12, Proof and Proving in Mathematics Education)*, Tokio, Japón. Obtenido el 28 de diciembre de 2004, desde http://www-leibniz.imag.fr/DIDACTIQUE/preuve/ICME9TG12/ICME9TG12Contributions/Olivero/Olivero00.html.

———— (2003a). "Cabri as shared workspace within the proving process". En **N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox** (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 429-436). Honolulu, Hawaii.

———— (2003b). *The proving process within a dynamic geometry environment*. Bristol, Inglaterra: University of Bristol, Graduate School of Education. (Tesis de doctorado.)

Ontiveros Quiroz, Sofía Josefina (1994). *El fracaso en la enseñanza de las matemáticas en bachillerato*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro.

Papert, Seymour (1982). *Desafío a la mente. Computadoras y educación*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Galápago. (Trad. del inglés: *Mindstorms: Children, computers & powerful ideas*. Basic Books, Inc. 1980.)

Parra, Blanca M. (1990). "Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas". En: **Alarcón Bortolussi, J.; Rosas Domínguez, R.S.** (coord.) (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas* (pp. 13-32). SEP, México.

Parzysz, Bernard (1988). "«Knowing» vs «seeing». Problems of the plane representation of space geometry figures". *Educational Studies in Mathematics*, 19:79-92

Pedemonte, Bettina (2001). "Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics". En **M. van den Heuvel-Panhuizen** (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 33-40). Utrecht, Holanda.

———— (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans la apprentissage des mathématiques*. Université Joseph Fourier-Grenoble I y Università di Genova. (Tesis de doctorado.) [Existe una copia en http://tel.ccsd.cnrs.fr/action/open_file.php?url=http://tel.ccsd.cnrs.fr/docs/00/04/60/71/PDF/tel-00004579.pdf&docid=46071&halsid=f91b62eb7fee97dbf3a02f466ba4a4fb.]

Peirce, Charles Sanders (1983). *La esencia de la matemática*. En **J. R. Newman** (comp.), *Sigma. El mundo de las matemáticas* (tomo 5, pp. 161-171). España: Grijalbo.

Pinto Sierra, José Manuel; Martínez Sánchez, Jorge (1994). *La teoría de Jean Piaget y el aprendizaje de las ciencias*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Pioli, Federica (1998). *Studi recenti sulla didattica della dimostrazione*. Modena, Italia: Università degli Studi di Modena. (Tesi di laurea.)

Pluvinage, François (1996). "Diferentes formas de razonamiento matemático". En **F. Hitt E.** (ed.), *Investigaciones en matemática educativa* (pp. 77-91). México: Grupo Editorial Ibearomérica.

Polya, George (1969). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

———— (1990). *Mathematics and plausible reasoning. Volume II: Patterns of plausible inference*. EEUU: Princeton Paperbacks.

Resnikoff, H.L.; Wells, R.O., Jr. (1973). *Mathematics in civilization*. EEUU: Dover Publications.

Sánchez Sánchez, Ernesto (2003). "La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración". *Educación Matemática*, 15(2):27-54.

Santos Trigo, Luz Manuel (1993). "La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas". *Mathesis*, 9(4):419-432.

———— (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, Alan H. (1985). *Mathematical problem solving*. EEUU: Academic Press Inc.

Siguán, Miquel; et al (1987). *Actualidad de Lev S. Vigostki*. España: Editorial Anthropos.

Simon, Martin A. (1996). "Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing". *Educational Studies in Mathematics*, 30:197-210.

Sinclair, Hermine (1987). "Constructivism and the psychology of mathematics". En **J. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran** (eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Canadá.

Singh, Simon (1998). *El enigma de Fermat*. México: Editorial Planeta.

Singh, Simon; Ribet, Kenneth A. (1998). "El último reducto de Fermat". *Investigación y Ciencia*, 256:20. (Trad. del inglés: "Fermat's last stand". *Scientific American*, 277(5):36. 1997.)

Stewart, Ian (1984). *Conceptos de matemática moderna*. España: Alianza Editorial.

Straesser, Rudolf (2001). "Cabri-Géomètre: Does dynamic geometry software change geometry and its teaching and learning?" *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 6(3):319-333.

Subsecretaría de Educación Básica (2006). *Matemáticas. Secundaria. Programas de estudio 2006*. México: Secretaría de Educación Pública.

Sutherland, Rosamund; Balacheff Nicolas (1999). "Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics". *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 4:1-26.

Tall, David (1992). "The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof". En **D. A. Grouws** (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 495-511). EEUU: MacMillan.

Thurston, William P. (1994). "On proof and progress in mathematics". *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, 30(2):161-177.

Tymoczko, Thomas (1986). *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston, EEUU: Birkhäuser.

Universidad Autónoma de Querétaro (2003). *Programas de estudios de la Escuela de Bachilleres*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro.

Ursini Legovich, Sonia (1993). *Pupils' approaches to different characterizations of variable in Logo*. Londres, Inglaterra: Universidad de Londres, Instituto de Educación. (Tesis de doctorado.)

Vergnaud, Gérard (1987). "About constructivism". En **J. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran** (eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 43-53). Canadá.

Vygotski, Lev Semionovitch (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, España: Editorial Crítica. (Trad. del inglés: *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harvard University Press. 1978.)

Yerushalmy, Michal; Chazan, Daniel (1993). "Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer". En **J. L. Schwartz, M. Yerushalmy y B. Wilson** (eds.), *The Geometric Supposer. What is it a case of?* (pp. 25-56). Hillsdale, New Jersey, EEUU: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Zanarini, Gianni (1994). "Strumenti virtuali e pensiero scientifico". *Bolletino CabriRRSAE*, 2:2.

ÍNDICE ANALÍTICO

A

Abstracción, 15
  Dialéctica del objeto-herramienta, 15
  física, 15
  Invarianza de esquemas, 15
  Papel de los símbolos, 15
  reflexiva, 15
Acomodamiento, 14
Acuña S., C., 28, 80
Adaptación, 14
Apolonio, 25
Appel, K., 11
Argumentación, 45
  Carácter semántico de la, 45
  Características de la, 45
  deductiva, 37
  Estructura de la, 49
  heurística, 50
  matemática, 43
  retórica, 50
  Tipos de, 50
  Valor epistémico de una, 47
Arquímedes, 10, 25
Arrastre
  Examen de, 76, 107
  Funciones del, 75
  inicio-fin, 104
  Modalidades del, 75
  Operación del, 64
  Percepción del, 104
  photo-dragging. *Véase* arrastre *inicio-fin*
  Tipos de manipulación por el, 75
Arzarello, F., 67, 77

B

Babilonios, 9
Bagni, G., 11
Balacheff, N., 29, 34, 35, 39, 67
Barbi, G., 36
Bartolache, J.I., 17
  Lecciones matemáticas, 17
Batanero, C., 18, 22, 27
Berkeley, Obispo, 10
Boero, P., 61
Brousseau, G., 5

C

Cabri-Géomètre, 64, 74, 78
Capponi, B., 69, 70
Cognición. *Véase* Conocimiento
Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro, *6*
Concepto figural, 70
Conectivo
  argumentativo, 48
  combinatorio, 47
  organizativo, 48
Conjetura, 109
  de Goldbach, 11
  de los cuatro colores, 11
  de Riemann, 11
  Nivel semiótico de una, 109
  Shimura-Taniyama, 11
  Validación de la, 109
  verficadas, 10
Conocimiento, 51
  autoevidente, 51
  intuitivo, 51
  intuitivo, Características del, 52
  lógicamente basado, 51
Constructivismo, 13
  ingenuo, 14
  Premisas del, 14
  radical, 14
  social, 16
Convicción, 59
  autoritaria, 59
  formal, 59
  intuitiva, 59
  intuitiva. Niveles de la, 59
Cultura matemática semi-rigurosa, 27

D

De Villiers, M., 33, 35, 77
Demostración, 26, 29, 41, 46, 109
  a conocimiento cero, 26
  Aproximaciones didácticas a la, 44
  Carácter cultural de la, 28
  Carácter sintáctico de la, 25
  como convicción, 34
  como descubrimiento, 34
  como explicación, 34
  como medio de comunicación, 34
  como problema, 22
  como reto intelectual, 35
  como sistematización, 34
  como verificación, 33
  Diferencia con la prueba, 29, 66
  Fases de construcción de una, 62

Funciones en la Educación Matemática de la, 33
holográfica, 27
La descontextualización, la despersonalización y la destemporalización de la, 29
Naturaleza de la, 23
Obstáculos prácticos de la, 25
Pasos para pasar a la, 41
por computadora, 10, 11, 27
que explica, 29
que prueba, 29
Relación con la argumentación de la, 67
Sentido de la, 41
Tipos de, 29
Valor epistémico de una, 47
Demostración-argumentación
Continuidad cognitiva y semántica, 62
Ruptura estructural y epistemológica, 67
Díaz-Barriga, E., 75
Dibujo, 69, 70, 76
satisfactorio, 71
Significados del, 70
Dieudonné, J., 9
Downs, F., 9
Duval, R., 44, 67, 108, 109

E

Egipcios, 9
Ejemplo genérico, 41
Ejercicio. *Véase* Problema de rutina
Empiricismo ingenuo, 41
Encadenamiento, 48
Enunciado
Estatuto operatorio de un, 48
Estatuto teórico de un, 47
Valor epistémico de un, 46
Error, 19
Estructura
algebraica, *14*
mental, 14
Euclides, 10, 25
Características de los teoremas de, 61
Los Elementos de, 61
Evidencia es prueba, 33
Experiencia
crucial, 41
mental, 41
Explicación, 40, 45

F

Figura, 69, 70, 76
en posición estándar, 104
prototipo. *Véase* Figura en posición estándar
Fischbein, E., 51, 69, 71
Fórmula, 25
Fréchet, M., 62, 113
Freudenthal, H., 8, 9
Fridman, L., 20
Fritzler, W., 8
Función ζ. *Véase* Conjetura de Riemann

G

Garuti, R., 61
Geometría racional, 61
Giannini, A., 36
Gödel, K., 10, 25
Godino, J.D., 18, 22, 27, 29, 66, 113
Gómez, P., 14
González G., N., 102
Guthrie, F., 11
Gutiérrez, A., *7*

H

Haken, W., 11
Hanna, G., 24, 29, 35, 37
Harel, G., 36
Hersh, R., 26
Hilbert, D., 10, 25
Hölzl, R., 69
Horgan, J., 27
Hoyles, C., 28

I

Inferencia, 48
Estructura de la, 48
Infinito
actual, 53
potencial, 53
Institución
de los enseñantes de la Matemática, 22
de utilizadores de la Matemática, 22
Interacción
activa, 14
social, 39
Intuición, 52
afirmatoria, 56
afirmatoria primaria, 56
afirmatoria secundaria, 56
anticipatoria, 55
Categorías de la, 55

J

Jones, K., 28

K

Kilpatrick, J., 15
Klein, F., 69
Kline, M., 9, 25

Koch, J., 11

L

Laborde, C., 69, 70
Lakatos, I., 26
Larios O., V., 80, 106

M

Maracci, M., 69, 71
Mariotti, M.A., 60, 64, 65, 69
Matemática
  experimental, 27
  Método de validación de la. *Véase* Demostración
  Papel de la historia de la, 9
Mayas, 10
Mediador semiótico, 115
Micromundo, 72
  Componente pedagógico del, 79
  Componente técnico del, 74
Modelo mental implícito, 54
Moise, E., 9

N

Nacional Council of Teachers of Mathematics, 5, 8
Negociación, 43
Newton, I., 10
Niveles de aprendizaje, 39
Noss, R., 8

O

Objeto geométrico, 70
  Componentes del, 69
Olivero, F., 67, 77, 107
Ontiveros Q., J., 16

P

Paola, D., 77
Papert, S., 72
Parra, B., 8, 18
Parzysz, B., 69
Pedemonte, B., 64, 67
Peirce, B., 24
Peirce, C.S., 24
Piaget, J., 14
Pluvinage, F., 29
Poincaré, H., 55
Polya, G., 18, 21, 36, 108
Principia Mathematica, 25
Problema, 17
  abierto, 65
  aplicado, 21
  bien estructurado, 20
  característico, 21
  Clasificación de, 20
  de rutina, 18
  Enseñanza a partir de, 7
  escolar, 16, 18
  estructurado que requiere un 'pensamiento productivo', 20
  Evaluación de, 20
  mal estructurado, 20
  matemático, 21
  no característico, 21
  para encontrar un objeto matemático, 21
  para una demostración o explicación, 21
  para una transformación o construcción, 21
  por demostrar, 21
  por resolver, 21
  práctico, 21
Proceso de validación, 40
Profesor
  Papel como mediador del, 65
Propiedades
  Preferencia entre, 105
Prueba, 40
  Esquema de, 36
  Esquema de..., analítico, 36
  Esquema de..., de convicción externa, 36
  Esquema de..., empírico, 36
  intelectual, 41
  para decidir, 41
  Pasos para pasar de un tipo a otro de, 41
  pragmática. *Véase* Prueba para decidir
  teórica. *Véase* Prueba intelectual
Prueba es evidencia, 33
Prueba-refutación, dialéctica, 39

R

Razonamiento, 39, 46
  Pasos del proceso de, 48
Razonamiento deductivo. *Véase* Inferencia
Razonamiento matemático
  Aspectos del, 52
Recio, A., 22
Regla de transformación, 25
Resnikoff, 10
Resnikoff, H.L., 8
Ribet, K., 11
Rigidez geométrica, 104
Rigor
  Nivel del, 35
Robutti, O., 77
Ruptura cognitiva, 51
Russell, B., 25

S

Sánchez S., E., 70

Schoenfeld, A., 17, 18
Singh, S., 11
Situaciones problemáticas, 16
Sociedad Matemática Mexicana, *6*
Software para Geometría Dinámica, 36, 64, 68, 72, 113
  Características del, 69
  Paquetes de, 74
  Rasgos característicos del, 75
Sowder, L., 36

T

Tall, D., 28, 35
Teorema, 24, 29
  Características distintivas de un, 61
  de completez e incompletez, 25
  de los cuatro colores. *Véase* Conjetura de los cuatro colores
  de Pitágoras, 30
  de Pitágoras, demostración que explica, 31
  de Pitágoras, demostración que prueba, 30
  Fases de producción de un, 62
  Nivel semiótico de un, 109
Teoría de los Conceptos Figurales, 69
Thurston, W., 27, 34
Transposición didáctica, 23
Turing, A., 27
  Máquina de, 27
Tymoczko, T., 11, 24

U

Ultimo teorema de Fermat, 11
Unidad Cognitiva de Teoremas, 60, 62, 79, 110
Universidad Autónoma de Querétaro
  Escuela de Bachilleres, 6

V

Van Hiele, P.M., 7
Vergnaud, G., 15, 16
Vygotski, L.S., 75, 106

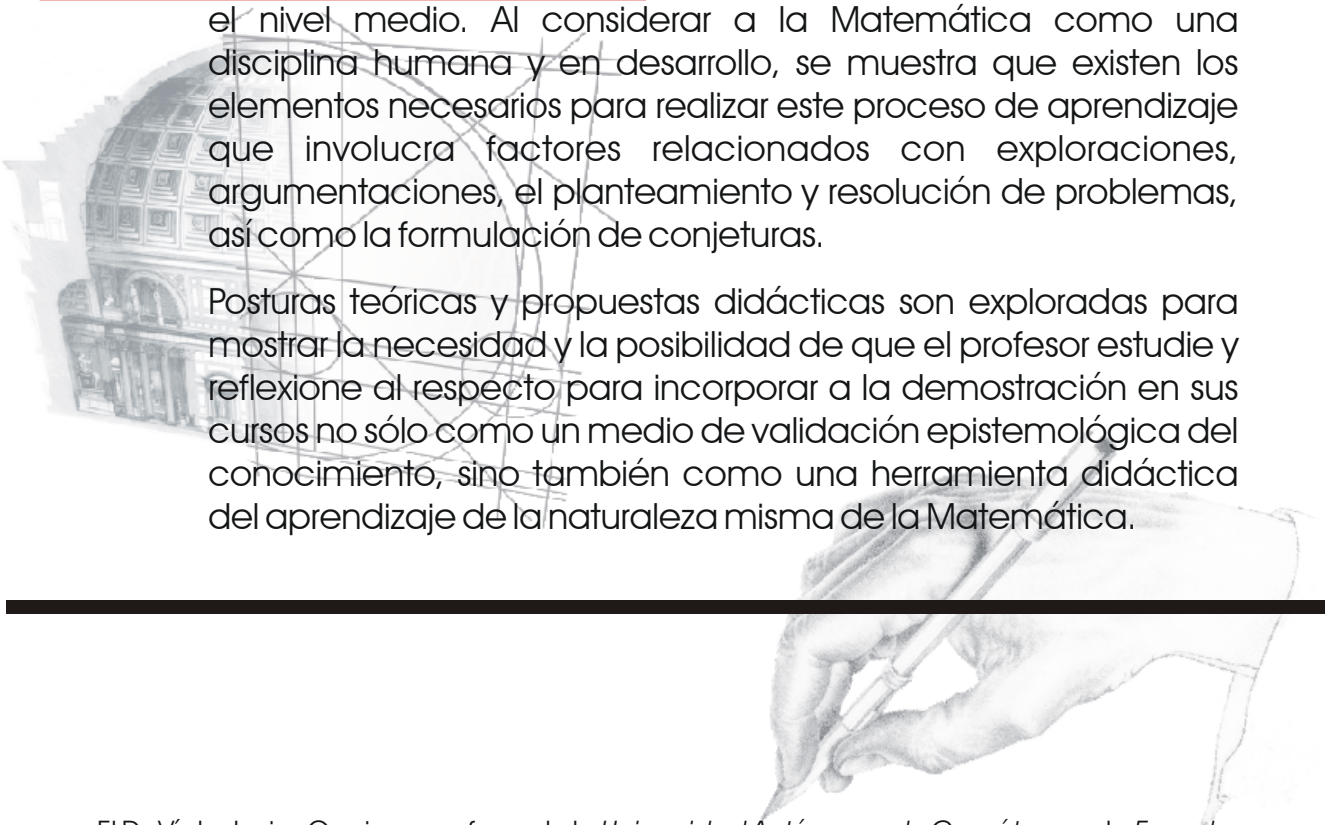
W

Wells, L.O., 8, 10
Whitehead, A.N., 25
Wiles, A., 11, 55, 62

La demostración en la Matemática ocupa un lugar privilegiado como el método único de validación de un conocimiento que, por su naturaleza y la más de las veces, está fuera del alcance de nuestra experiencia directa obtenida a través de los sentidos. En la educación este método de validación es hecho a un lado por muy diversas razones que la mayor parte de las veces no tiene que ver con la Matemática misma, sino con las concepciones sobre ésta.

En este libro se muestra no sólo la necesidad de que la demostración sea enseñada, sino que puede ser aprendida en el nivel medio. Al considerar a la Matemática como una disciplina humana y en desarrollo, se muestra que existen los elementos necesarios para realizar este proceso de aprendizaje que involucra factores relacionados con exploraciones, argumentaciones, el planteamiento y resolución de problemas, así como la formulación de conjeturas.

Posturas teóricas y propuestas didácticas son exploradas para mostrar la necesidad y la posibilidad de que el profesor estudie y reflexione al respecto para incorporar a la demostración en sus cursos no sólo como un medio de validación epistemológica del conocimiento, sino también como una herramienta didáctica del aprendizaje de la naturaleza misma de la Matemática.



El Dr. Víctor Larios Osorio es profesor de la *Universidad Autónoma de Querétaro* en la *Escuela de Bachilleres* y en la *Facultad de Ingeniería* en las áreas de Matemática y Matemática Educativa. Se ha interesado en el estudio de los procesos de aprendizaje de la Matemática, particularmente en lo relacionado con la Geometría, la Estadística y la integración de la tecnología informática en los llamados *Ambientes de Matemática Dinámica*. Está convencido que el mejoramiento de la enseñanza se logra a través de la formación adecuada del profesorado, por lo que colabora en proyectos con esa orientación como es la *Maestría en Didáctica de las Matemáticas* y la *Especialidad en Docencia de las Matemáticas*, en los que participa en su coordinación desde 2002. Realizó sus estudios de *Maestría en Docencia de las Matemáticas* en la U.A.Q. y en 2005 obtuvo su doctorado en el *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.* Ha participado en eventos nacionales e internacionales, teniendo la oportunidad de que sus trabajos aparezcan publicados en México, Argentina, Italia, Australia, España y Portugal.